Neu abgefaßte
Methode
die
Geometrie
von sich selbst zu erlernen,
Zweyter Band;
durch
vielen Fleiß und Mühe aus denen besten Autoribus zusammengetragen und mit verschiednen neu erfundnen Aufgaben vermehrt,
nebst einer vollständigen nirgend anders wo zu findenden Anweisung vom Gebrauch des so nützlichen als nöthigen
Proportionalzirkels
versehen
und mit sehr vielen hierzu nöthigen accuraten Kupfer-Tafeln gezieret
von einem
Liebhaber Der Architektur vnd Mathematik
K. P. und der D. R. C. von der J. und Ingen.

Breslau 1781
bey Johann Friedrich Korn dem ältern,
im Buchladen nächst dem Königl. Oberzollamt am Markt.

Dem

Durchlauchtigsten Fürsten

und Herrn

HERRN

August Ordinat Sulkowsky

des h. Röm. Reichs Fürsten und regierendem Herzoge zu Bielitz, Woywoden von Kalisch; Ihro Röm. Kaiserl. Königl. Apostol. Maj. geheimen Staatsratsrath und Kämmerer; Generallieutenant von der Infanterie und Chef eines Regiments zu Fuß, in Diensten Sr. Maj. des Königs und der Durchl. Republik von Polen, Präsidenten der errichteten Educationscommission; Starosten zu Neuhof, Grafen zu zu Reissen, Zduny und Gerechen; Erbherrn auf Wyoff, Dabecz, Kloda, Kluzschewo und Kobilin rc. rc. rc. des poln. weissen Adler- und St. Stanislai-, wie auch des russ. kaiserl. St. Andreas- und St. Alexander Newski-Ordens Ritter und des Maltheserordens Großkreuz,

Meinem gnädigsten Fürsten und Herrn.

Neu abgefaßte
Methode
die
Geometrie
von sich selbst zu erlernen,
Zweyter Band;
durch
vielen Fleiß und Mühe aus denen besten
Autoribus zusammengetragen und mit ver=
schiednen neu erfundnen Aufgaben
vermehrt,
nebst einer vollständigen nirgend anders wo zu
findenden Anweisung vom Gebrauch des so
nützlichen als nöthigen
Proportionalzirkels
versehen
und mit sehr vielen hierzu nöthigen accuraten Kupfer=
Tafeln gezieret

von einem
Liebhaber Der Architektur
vnd Mathematik
K. P. und der D. R. C. von der J. und Ingen.

Breslau 1781
bey Johann Friedrich Korn dem ältern,
im Buchladen nächst dem Königl. Oberzollamt am Markt.

Dem

Durchlauchtigsten Fürsten

und Herrn

HERRN

August Ordinat Sulkowsky

des h. Röm. Reichs Fürsten und regierendem Herzoge zu Bielitz, Woywoden von Kalisch; Ihro Röm. Kaiserl. Königl. Apostol. Maj. geheimen Staatsratsrath und Kämmerer; Generallieutenant von der Infanterie und Chef eines Regiments zu Fuß, in Diensten Sr. Maj. des Königs und der Durchl. Republik von Polen, Präsidenten der errichteten Educationscommission; Starosten zu Neuhof, Grafen zu zu Reissen, Zduny und Gerechen; Erbherrn auf Wyoff, Dabecz, Kloda, Kluzschewo und Kobilin rc. rc. rc. des poln. weissen Adler- und St. Stanislai-, wie auch des russ. kaiserl. St. Andreas- und St. Alexander Newski-Ordens Ritter und des Maltheserordens Großkreuz,

Meinem gnädigsten Fürsten und Herrn.

Durchlauchtigster Herzog,
Gnädigster Fürst und Herr,
Gnädiger Herr!

Die weltbekannte Kenntniß, welche Ew. Hochfürstl. Durchl. in allen gelehrten Wissenschaften besitzen, sowohl, als die Gnade und der Schutz, welchen Allerhöchst Dieselben denjenigen angedeihen lassen, so sich auf reelle und dem Publiko nützliche Studia legen, veranlasset mich, Ew. Herzogl. Durchl. gegenwärtigen zweyten Band meiner neu abgefaßten Methode die Geometrie von sich selbst zu erlernen, allerunterthänigst zu Füßen zu legen, wohl wissende, daß, wenn Ew. Hochfürstl. Durchl. dieses geringe Werk eines gnädigen

Anblicks und Dero hohen Schutzes würdigen, selbiges sodann den Beyfall aller derjenigen erhalten wird, so sich diesem so schönen als nützlichen und nicht zu entbehrenden Metié widmen wollen.

Womit mich Ew. Hochfürstl. Durchl. zu fernern hohen Gnaden allerunterthänigst empfehle, und in tiefster Submission ersterbe

Durchlauchtigster Herzog

Luszwitz
den 15. Sept. 1779.

unterthänigst gehorsamster
Knecht
L. D. A. von Moller,
Capit. Ingen.

Vorrede.

Vorrede.

Hiermit überliefere ich dem geneigten und nach Standesgebühr geehrten Leser den zweyten Band meiner neu abgefaßten Methode die Geometrie von sich selbst zu erlernen.

Es enthält dieser zweyte Band die Beweise und Demonstrationes aller nur möglichen Grund- und Lehrsätze; und ich habe mich nach dem Wunsche des grossen und gelehrten Professors, Freyherrn von Wolf, besonders beflissen, diejenigen Grund- und Lehrsätze, wo es nur im geringsten möglich gewesen, vor der mathematischen Demonstration durch einen mechanischen Beweis, oder durch ein anderes deutliches Exempel, auf eine recht leicht zu begreifende Art dergestalt zu erklären, daß es auch sogar der Einfältigste muß fassen und begreifen können.

Und ich hoffe gänzlich, daß, da noch bisher kein Werk erschienen, in welchem, nach dem Wunsch des nurgedachten Freyherrn von Wolf, die Grund- und Lehrsätze auf eine mechanische Art demonstrirt worden, dieses gegenwärtige gewiß Approbation finden wird, (besonders in einem Lande, wo sich die Lehrer nicht gerne mit ihren Untergebenen viel Mühe geben, oder wo es, besonders unter dem Pöbel und geringen Adel, sehr viel schwache und dumme Köpfe giebt, welchen man alles, so zu sagen, ins Maul hineinschmieren muß, ehe sie einen verstehen), da zumal verschiedene von den Herrn Patribus der frommen Schulen, wie auch von den Exjesuiten, als ich noch vor einigen Jahren in Warschau nach diesem meinem Manuscript in beyden Collegiis privatim docirte, mir angerathen haben, dieses Werk, seiner Ordnung wegen, in welcher es abgefasset ist, und seiner Deutlichkeit wegen, dem Druck zu überliefern. Auch haben mir verschiedene meiner Scholaren, sowohl als andere gute Freunde sehr angelegen und mich gebeten, es drucken zu lassen, weil in dieser Art kein solches sowohl leichtes, als deutli-

ches und kompletes geometrisches Schulbuch vorhanden ist, ja es haben solches auch einige Handwerker, welche bey mir zu arbeiten hatten, als Tischler und dergleichen, gesehen, und mit meiner Erlaubniß ein wenig darinnen gelesen, welche sehr bedauerten, daß es nicht gedruckt wåre, sonst wollten sie es gleich kaufen; da doch zur selbigen Zeit das Manuscript lange nicht so komplet war, als es jetzt ist, daß ich mich also entschlossen habe, solches der Presse zu übergeben.

Ich hoffe demnach, daß es geneigt aufgenommen werden und diese Frucht bringen soll, welche ich für alle meine viele Arbeit als den besten Lohn erwarte, daß es nämlich ein jeder, der es nur mit Bedacht überlieset und durchgehet, verstehen und begreifen könne.

Haben Gelehrte und Verständige etwas daran auszusetzen, so bitte ich, mir Dero Verbesserung schriftlich zuzuschicken, denn sowohl in der Mathesi, als Musik und Frisur, lernet wohl kein Mensch jemals aus; aus dem Tadel der Schulfüchse und Pedanten aber mache ich mir nichts.

So

So viel habe ich nur noch zu erinnern, daß derjenige, welcher die Geometrie gründlich erlernen will, sich weiter kein Buch, welches von der Geometrie handelt, anschaffen darf, weil in diesem alles befindlich, was man nur im Euclides, **Wolf, Mallet, Sturm, Martis, Peuther, Rost, Segner, Hederich** und vielen andern theilweise antrifft.

Werden meine Leser sich die Mühe nicht verdrießen lassen, diese wenigen Bogen mit Aufmerksamkeit durchzugehen, die Figuren gehörig vorzunehmen, und die Beweise beständig dabey zu überdenken, so zweifle ich nicht, daß sie die unumstößliche Wahrheit der geometrischen oder mathematischen Grund- und Lehrsätze vollkommen einsehen, und dadurch in der Anwendung oder Praxi vieler Weitläuftigkeit und Mühe überhoben werden; in welcher Absicht es auch also aufs deutlichste eingerichtet worden.

L. D. A. v. M.
Capit. et Ing.
als Autor.

Inhalt
des zweyten Bandes.

Hauptanmerkung über die Demonstration S. 3

I. Abschn. A. Von den geraden Linien an sich selbst S. 12

B. Von den in einem Zirkel befindlichen geraden Linien S. 22

II. Abschn. Von den Parallellinien S. 66

III. Abschn. Von den Proportional- oder verhältnißmäßigen geraden Linien und ihrer Theilung S. 74

IV. Abschn. Von den Winkeln S. 96

A. Von den Winkeln, so durch die Zirkellinie entstehen S. 96

B. Von den Winkeln, so durch die Parallellinien entstehen S. 107

C. Von den Centri- und Peripheriewinkeln in den Zirkeln S. 116

V. Ab-

V. Abschn. Von den Flächen oder Figuren S. 133
1. Von den Dreyecken S. 133
A. Demonstrationes oder Beweise der gleichen Triangel S. 133
B. Demonstrationes der ähnlichen Dreyecke S. 153
C. Von den durch proportionirte Bases gleichen und ähnlichen Triangeln S. 176
D. Von den Winkeln und Seiten in den Triangeln S. 180
2. Von den Quadrilateris S. 202
A. Von den Vierecken an sich selbst S. 202
B. Von den Vierecken, so auf den Seiten der Triangel entstehen S. 220
3. Von den regulären und irregulären Vielecken S. 238

Zweyter Band,

so da enthält

mechanische und mathematische

Beweise

der im ersten Bande enthaltenen

geometrischen Regeln.

Welcher

Band zur Unterweisung der theoretischen Geometrie vollkommen hinlänglich ist.

Der

Geometrie

Zweyter Theil.

Hauptanmerkung über die Demonstration.

Da ich in der 5ten Erklärung §. 7. meines ersten Bandes, die Geometrie von sich selbsten zu erlernen, und zwar im ersten Abschnitte der Einleitung, gesagt, was ein Grundsatz sey:

„Nämlich ein solcher Satz, der da so klar, daß „er keines Beweises bedarf:“

so ist dieses zwar allen denjenigen, so Mathematik studirt haben, bekannt; aber noch nicht Beweises genug, daß alle diejenigen, so Mathesin studiren, oder die Geometrie erlernen wollen, die Grund- oder Lehrsätze so platterdings vor wahr annehmen. Dahero finde vor nöthig, deutlicher zu erklären, was ein Beweis und Demonstration eines Grund- oder Lehrsatzes sey, und citire dahero die eigenen Worte des mathematischen Lexici p. 201, welche also lauten:

„Beweis, Demonstratio, ist ein Zusam-
„menhang lauter förmlicher Schlüsse, die
„sich dergestalt zergliedern lassen, daß die
„Hintersätze der vorhergehenden wieder Vor-
„dersätze in den folgenden abgeben, und kein
„Vordersatz in dem Schlusse angenommen
„wird, der nicht schon vorhero erwiesen worden.
„Es ist aber wohl zu merken, daß in einer
„richtigen Demonstration zwar alle Schlüsse,
„wie sie auf einander folgen, enthalten sind;
„jedoch werden nicht alle Vordersätze hinge-
„setzet, wie es die Forme des Schlusses
„erfordert.

„Denn öfters läßt man einen von den
„Vordersätzen weg, weil er dem geübten Leser
„einfält, indem er ein Wort mit dem, das
„da steht, gemein hat, oder auch durch eine
„Citation dem Ungeübten in das Gedächtniß
„gebracht wird. Oefters läßt man beyde
„Vordersätze weg, und folgen die Hinter-
„sätze zweyer Schlüsse unmittelbar auf ein-
„ander, weil der Hintersatz des vorhergehen-
„den Schlusses zugleich ein Vordersatz des fol-
„genden ist, und der andere Vordersatz, wie
„nur erwähnet, erinnerlich wird.

„Diese Art zu demonstriren wird am aller-
„vollkommensten in der Geometrie in Acht
„genommen, und kann man gar leicht der
„geometrischen Demonstration gewohnen,
„wenn man auf folgendes Acht hat. Das
„Anschauen

„Anschauen der vorgezeichneten geometrischen „Figur, darauf man seine Gedanken im De„monstriren richtet, giebt anfangs einen Satz, „den man nicht erweisen darf, weil man ihn „in der Bedingung so voraussetzt, oder auch „willkührlich nach Erforderung der Umstän„de also annimmt. Dieser Satz hat ein Glied „gemein mit einem andern, der uns um des„willen einfällt, und so haben wir den an„dern Vordersatz.

„Endlich setzen wir die beyden Glieder zu„sammen, welche diese Sätze nicht mit ein„ander gemein haben, und so kömmt der „Hintersatz.

„Unterweilen nimmt man diesen Hinter„satz zu einem Vordersatze an, und weil er „mit einem andern Satze, den wir zu andrer „Zeit gedacht haben, ein Glied gemein hat, „bringt er uns denselben ins Gedächtniß, und „wir finden daraus, wie vorhin, den Hin„tersatz.

„Zuweilen bringt man mehr als einen „Hintersatz auf die erste Art durch Betrach„tung der geometrischen Figur heraus, und „die Vergleichung verschiedener herausge„brachter Sätze giebt einen Vordersatz an „die Hand, der ein Glied mit einem gemein „hat, und wie vorhin zur Erfindung eines „Hintersatzes dient.

„So verfährt man immer fort, bis man „endlich den Lehrsatz zum Hintersatze des „Schlusses bekömmt, welchen man erwei„sen sollte.

„Aber nicht allein die Mathematici und „Geometrä nehmen dieses bey ihrem Demon„striren in Acht, sondern alle Menschen, alle „Tage, ja stündlich und augenblicklich, so oft „sie aus einem gegenwärtigen Gedanken auf „einen andern kommen. Zum Exempel: ei„ner, Namens Titius, hört die Glocke auf der „Kirche lauten, dieser steckt klein Geld zu „sich und geht in die Kirche. Hier ist die „Frage: wie das Glockenlauten den Titium „dazu bringen kann, daß er klein Geld zu sich „steckt, und in die Kirche gehet; denn bey an„dern hat es nicht diese Wirkung. Ich sage: „dieß geschieht, weil er nach eben der Art, wie „die Mathematici und Geometrä im Demon„striren, immer eines aus dem andern schließt: „nämlich er hört den Klang der Glocken und „weiß, daß es Kirchtag und halb sieben Uhr „ist, also erkennt er diesen Satz durch Auf„merksamkeit auf dasjenige, was ihm gegen„wärtig in die Sinne fällt: heute ist Kirch„tag, und jetzo halb sieben Uhr, und man „lautet die Kirchglocke. Dieses bringt ihm „in das Gedächtniß einen Satz, den er zu „andrer Zeit durch vielfältige Erfahrung er„kannt: wenn man am Kirchtage gegen halb „sieben Uhr die Glocken lautet, so ist es Zeit in

„die Kirche zu gehen. Dieser Satz bringet ihm, „vermittelst des Worts Kirche, ins Gedächt„niß seinen Entschluß, den er gefaßt: wenn „es Zeit ist in die Kirche zu gehen, so will „ich hineingehen, und also schließt er daraus: „ich muß jetzt gehen. Dieser neue Satz: ich „muß jetzt in die Kirche gehen, bringt ver„mittelst des Worts, Kirche, ins Gedächt„niß: in der Kirche muß man Geld in den „Klingelbeutel legen, hierbey fällt ihm fer„ner ein: wer Geld in den Klingelbeutel le„gen will, muß Geld bey sich haben, und „daher schließt er, so muß auch ich Geld bey „mir haben. Dieses bringt ihm ferner in den „Sinn: wer Geld bey sich haben will, muß „welches zu sich stecken, und so kömmt er auf „die Resolution, daß er Geld zu sich steckt. „Wenn man dieses mit dem vorigen ver„gleicht, so wird man finden, daß die Geo„meträ bey ihrem Demonstriren sich nicht „anders aufführen als alle andre Arten „Menschen bey ihren vernünftigen Hand„lungen und Verrichtungen. Daß aber „alle Gedanken dem Titio in der Ordnung, „wie sie hier erzählet, in den Sinn kom„men müssen, beweiset der Mathematicus „Freyherr von Wolf daher, weil man nicht „mehr Raison geben kann, warum der fol„gende ihm einfällt, wenn einer von diesen „vorhergehenden weggelassen wird, und ver„dient hiervon nachgelesen zu werden, was

„er in seinen vernünftigen Gedanken von Gott „und der Seele des Menschen §. 348. u. folg. „gründlich angeführt.

„Hieraus ersieht man zur Gnüge, wie sehr „sich bishero diejenigen betrogen, welche außer „der Mathematik in andern Wissenschaften „ihre Sachen demonstriret zu haben ver„meynet.

„Weil man nun also das Demonstriren „am besten durch die Uebung lernt, und die„ses von den Geometris und Mathematicis „am richtigsten in Acht genommen wird, so „soll man die Geometrie, sonderlich wie sie „von gedachtem großen Mathematico Baron „von Wolf in seinen Anfangsgründen abge„handelt, mit rechtem Ernst und Eifer trei„ben. Und zwar ist es rathsam, wenn solches „gleich im Anfang geschieht, ehe man andere „Wissenschaften und Disciplinen tractiret, „da man nicht so sonderlich und natürlich rai„sonniret, aus Ursachen, die mehr gedachter „Baron von Wolf an oben angeführtem Orte „anzeigt. Denn weil die Mathematici „und Geometrä so raisonniren, wie es die „Natur der menschlichen Vernunft mit sich „bringt, und alle Menschen zu thun pflegen, „wenn sie vernünftige Handlungen vorneh„men, so lernt man die Vernunft in Wissen„schaften durch diese Uebung viel leichter „brauchen, als wenn man sie durch das ge„meine Studiren erst verderbt oder vielmehr „unter-

„unterdrückt hat, und die Einfälle im Gedächtniß mit vernunftmäßigen Schlüssen „vermengt.

„So ferne nun, wie gleich oben angeführt, „der letzte Hintersatz in den Schlüssen, so „man gehörigermaßen mit einander ver„knüpft, derjenige Lehrsatz ist, den man er„weisen will, so heißt dieses affirmative er„weisen, oder demonstratio directa; da hin„gegen negative erweisen, oder demonstra„tio indirecta ist, wenn der letzte Hintersatz „in den Schlüssen, so auf vorhin beschriebene „Art mit einander verknüpft, ein Satz ist, „welcher einer offenbaren Wahrheit wider„spricht.

„Man nimmt nämlich an, daß das Wi„derspiel von demjenigen Satze wahr sey, den „man erweisen soll, und schließt daraus et„was, so augenscheinlich ungereimt ist. Exem„pel davon findet man verschiedene hin und „wieder in den Schriften der Mathemati„corum. Diese Art zu demonstriren ist über „die Maaßen nützlich, wenn man einen seines „Irrthums überführen soll, oder will. Und „dieser bis daher beschriebene Beweis, weil „er von den Geometris am mehresten ge„braucht wird, heißt gemeiniglich ein geome„trischer Beweis, zum Unterschied einer me„chanischen Demonstration, die also beschaf„fen, daß man, vermittelst nöthiger Instru-

„mente, die Sache, so erwiesen werden soll, „untersucht, und richtig befindet.

Tab. I. Fig. X. „Als, man soll zum Exempel erweisen, daß „alle drey Winkel in einem Dreyeck zusam„men genommen 180 Grad, das ist: zwey „rechte Winkel ausmachen.

„Den mechanischen Beweis aber stellt „man also an: Aus dem Mittelpuncte c der „einen verlängerten Seite a d, Tab. I. Fig. X. „beschreibt man einen halben Zirkel h i k l, „und aus den Puncten a und b, mit eben „der Oeffnung des Winkels oder Zirkels, „oder besser mit gleicher Zirkelspannung, die „Zirkelbogen f und g. Wenn man nun die „Chorden oder Sennen dieser Bogen f und „g, auf den Bogen i l, aus i nach k und „aus k nach l trägt, so findet man, daß die„se beyden Bogen f und g zusammenge„nommen dem Bogen i k l gleich sind, fol„gends ist der Schluß, daß die drey Winkel „a, b, c, des Triangels a b c zusammengenom„men, einem halben Zirkel gleich sind, und „also 180 Grad oder zwey rechte Winkel „betragen.

„Diese mechanischen Beweise werden son„derlich für Anfänger, von unserm großen „oft erwähnten Mathematico Freyherrn von „Wolf, sehr zuträglich gehalten, weil die ma„thematischen etwas schwerer scheinen; und „achtet er dahero vor dienlich, wenn jemand

„zum

„zum Gebrauch der Jugend in Schulen und „Gymnasiis die Geometriam mit solchen „mechanischen Beweisen schriebe, doch müßte „vor allen Dingen mit darauf gesehen wer= „den, daß diese Beweise so eingerichtet wür= „den, daß sie die Anfänger zugleich zu den „mathematischen führten, als wie zum Exem= „pel geschieht, wenn man den Bogen oder „dessen Spannung g aus i nach k trägt, und „hingegen den Bogen f aus k nach l; denn „da sieht man hernach gleich, daß die Linie „c e mit a b =, und folglich der Bogen „k l dem Bogen f gleich seyn muß. Ja er „bekräftigt, daß er aus vielfältiger Erfahrung „befunden, daß diese machanischen Beweise „sehr dienlich sind, die Sätze, so man erwei= „sen soll, recht zu verstehen, und die mathe= „matischen Beweise und Begriffe viel leich= „ter zu fassen und zu begreifen.“

Tab. I. Fig. 1.

Erster Abschnitt.

A. Von den geraden Linien an sich selbst.

Der erste Lehrsatz.

Tab. I. Fig. 1. Zwischen zwey Punkten a und b kann nur eine einzige gerade Linie a c b seyn.

1. Beweis.

Wenn man eine andre gerade Linie von a nach b ziehen wollte, welche jedennoch aber den Punkt c, welcher auf a b steht, nicht berühren sollte, so müßte solche entweder wie die krumme Linie a d b, oder wie die gebrochne Linie a e b, bey c vorbey gehen, und, da c auf der geraden Linie a b liegt, also von dieser geraden Linie a b abweichen: folglich einen Bogen a d b, oder einen Winkel a e b, formiren. Derohalben ist die gerade Linie a c b die kürzeste, so nur zwischen den beyden Punkten a und b möglich; weil selbige weder rechts noch links, so wie die krumme Linie a d b, oder wie die gebrochene Linie a e b, von ihrer schnurgeraden Richtung a c b abweichet.

2. Me-

2. Mechanischer Beweis.

Man setze zum Exempel zwey Stangen in die Erde, und befestige eine willkührlich lange Schnur, welche an beyden Enden einen eisernen Ring hat, solchergestalt an die Stangen oder Baquen, daß diese Meßstangen durch die Ringe gehen; so wird die Schnur, wenn sie recht feste angezogen ist, eine gerade Linie, und die zwey Stangen der geraden Linie oder Schnur Endpunkte seyn. Wollte man nun, zwischen diese zwey Punkte unserer Stangen, noch eine andere gerade Linie durch eine eben dergleichen Schnure ziehen, und selbige an unsere zwey Stangen, welche die beyden Punkte a und b vorstellen, befestigen, so würde diese neue Schnur, oder gerade Linie, auf die unterste allbereits gezogene Schnur oder gerade Linie zu liegen kommen, und selbige decken; folglich würden beyde Schnuren dennoch nur eine gerade Linie seyn. Sollte man aber zum Exempel die zu oberst liegende Schnur von der untern nur in etwas abziehen, so wäre die obere Linie, schon keine gerade Linie mehr, weil sie rechts oder links, nach dem man sie abgezogen, von der geraden Richtung a c b abweichen würde. Tab. I. Fig. 1.

Legte man aber diese zweyte Schnur in directione recta, rechts oder links, hart neben die allbereits schon gerade ausgespannte Schnur, so würde diese neue Schnur zwar auch eine gerade Linie seyn, aber nicht ihren Ursprung aus

dem

dem Punkt a haben, und ihre Richtung in den Punkt b nehmen, sondern dichte neben den beyden Punkten a und b sich anfangen und endigen.

3. Mathematischer Beweis.

Es sey zum Exempel die gerade Linie a b, auf welche man einen Triangel a c b aufsetzen wollte; doch sollten beyde dazu gehörige Seiten oder Schenkel a f und b g, zusammengenommen, nur so lang wie a b seyn. Wenn dieses ist, so werden diese Linien a f und b g auf der geraden Linie oder Basis a b im Punkt h zusammenfallen, und diese gerade Linie a b accurat nur decken, weil a f + b g = a b. Verlängert man aber diese Seiten oder Schenkel a f und b g nur um die kleinen Theile f c und g c, so werden diese Linien a f + f c und b g + g c ein Dreyeck a c b formiren. Und so man diese geraden Linien oder Schenkel a c und b c des Triangels a c b auf dessen Basis a b herabfallen lassen wollte, so werden sie nicht allein die Grundlinie a b decken, sondern die zugesetzten Theile f c und g c werden in d e über einander schlagen.

Tab. I. Fig. 2.

Erster Zusatz.

Derowegen können zwey Parallel- oder andre gerade Linien keine Figur geben.

Zweyter Zusatz.

Folglich müssen in einem jedweden Dreyeck a c b zwey Seiten oder Linien, wie a c und b c

zusam-

zusammengenommen, allezeit größer oder länger, als die dritte, seyn.

Zweyter Lehrsatz.

Aus einem auf der geraden Linie ab angenommenen Punkte c, kann nur ein Perpendikel cd aufgerichtet werden.

1. Mechanischer Beweis.

Man hätte zum Exempel, einen accurat nach der Grundwaage planirten Ort zu einem Garten oder andern dergleichen, wie z. E. die gerade Linie ab, in dieses Stück Land wollte man aus c eine Stange cd recht perpendikulär oder vielmehr vertical nach dem Bleyloth errichten: so setzt man in c eine Stange dc auf diese Art ein, so wie die Maurer durch das Bleyloth die Mauern perpendikulär errichten. Sollte nun in diesem Punkt c noch eine zweyte Stange, wie ce, errichtet werden, so würde man solche zwar harte oder dichte neben c eintreiben können, sie würde aber oben in e vom Punkte d der Stange cd, um das kleine Theil de, abweichen, und würde also ec niemalen aus dem wahren Punkt c perpendikulär auf ab, wie cd, aufstehen, sondern auf diesem horizontal liegenden planirten Grunde ab einen spitzigen Winkel f machen; da hingegen dc auf ab mit einem Winkel von 90 Graden, das ist: winkelrecht, oder perpendikulär, aufsteht. Tab. I. Fig. 3.

2. Ma-

2. Mathematischer Beweis.

Tab. I. Fig. 3. cd steht auf ab perpendikulär per constructionem, ergo ist der Winkel dcb = 90 Grad = dem rechten Winkel. Der Winkel f und der Winkel ecd sind beyde zusammengenommen = dem Winkel dcb, = 90 Grad, denn auf einer geraden Linie ab kann aus einem angenommenen Punkte ein halber Zirkel construirt werden. Ergo ist der Winkel f, oder sein gleicher ace, um den Winkel ecd kleiner, als der Winkel dcb, kleiner als 90 Grad. Welches das erste war.

Ergo ist auch der Winkel bcd = dem Winkel dce + dem Winkel eca zusammengenommen. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Dritter Lehrsatz.

Jede gerade Linie cd, so aus einem gegebenen Punkte c auf eine gerade Linie ab in directione perpendiculari oder senkrechter Richtung gezogen wird, ist die kürzeste, so auf selbige gezogen werden kann.

1. Mechanischer Beweis.

Tab. I. Fig. 4. Gesetzt, die gerade Linie cd wäre eine Stange, so man senkrecht nach dem Bleyloth aus der Decke c, auf dem Fußboden ab, in d eingesetzt hätte, und man sollte oder wollte aus eben dem Punkte c eine zweyte Stange ce senkrecht

in

in d einsetzen, so würde solches nicht angehen, denn man würde erstens diese zweyte Stange ce im Punkte c nicht befestigen, sondern sie nur neben dem Punkt c anhängen können, und zweytens, würde diese zweyte Stange ce, wegen der ersteren Stange cd, allezeit in etwas von selbiger abweichen, und folglich der Punkt e nicht auf den Punkt d fallen. Ergo stünde ce nicht auf der geraden Linie ab perpendikulär, denn der Winkel f, oder sein gleicher ceb, würde ein stumpfer Winkel seyn. Und die zwischen der wahren Perpendikular cd, und der falschen Perpendikular ce, liegen gebliebene kleine Distanz de, würde mit der wahren Perpendikular dc, und der falschen ce, einen kleinen rechtwinklichten Triangel dce formiren. Welches das erste war.

Tab. I. Fig. 4.

Sollte aber absolument die Afterperpendikular ce eine wahre senkrechte Linie seyn, und aus dem Punkt c in d fallen, so würde sie auch die Perpendikular cd decken, und also gleichsam nur eine senkrechte Linie auf ab zu sehen seyn: folglich ist auch nur aus einem angenommnen Punkte c eine einzige wahre Perpendikulärlinie cd zu ziehen möglich, welche aber auch zugleich die kürzeste gerade Linie ist unter allen denen, so auf die Grundlinie ab, aus dem Punkte c, gezogen werden können.

2. Mathematischer Beweis.

Tab. I. Fig. 4. Die gerade Linie c d steht auf der geraden Linie a b perpendikulär, per constructionem; denn der Winkel c d a ist = 90 Grad = dem rechten Winkel, ergo ist der Triangel c d e ein rechtwinklichtes Dreyeck, dessen Cathete die wahre Perpendikular c d, die Hypothenuse aber die Afterperpendicular c e des Triangels c d e ist. Welches das erste war.

Da nun in einem rechtwinklichten Dreyeck die Seite oder Hypothenuse c e, welche dem rechten Winkel d unterspannet ist, die längste Linie in diesem rechtwinklichten Triangel e d c ist, ergo ist auch diese Hypothenuse c e länger, als die Cathete c d des rechtwinklichten Dreyecks c d e, et ergo ist die Perpendikular c d die kürzeste gerade Linie, so auf eine andre gerade Linie a b gezogen werden kann. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Zusatz.

Der Perpendikel c d, welcher aus der Spitze c eines Triangels c d e auf dessen Basis d e gezogen wird, giebt also die Höhe eines Trigonis, nach der er berechnet werden kann.

Vierter Lehrsatz.

Wenn man dem auf der geraden Linie a b stehenden Perpendikel c d aus d unterwärts nach e verlän=

verlängert, so hängt d e auch in directione perpendiculari von a b ab.

1. Mechanischer Beweis.

Da man auf jeder geraden Linie a b, aus einem angenommenen Punkte d, einen halben Zirkel beschreiben kann, siehe den ersten Band, Regul. Geometr. 58, so reißet aus diesem Centro d der Perpendikular d c auf die gerade Linie a b ober- und unterwärts einen Zirkel k l m n. Verlängert man sodann die Perpendikulärlinie c d unterwärts nach Willkühr gegen e, so bekömmt man in dem gezognen Zirkel k l m n vier Winkel f, g, h, i. Nun wird der Bogen k l gleich seyn dem Bogen l m, denn alle auf dem Diametro k m eines halben Zirkels k l m aus dem Centro d errichtete Perpendikularen d c, oder d l, theilen den halben Zirkel k l m, in zwey gleich große Theile oder Quadranten k l, und l m; folglich ist der Bogen k l = dem Bogen l m. Nun fasset die Spannung oder Chorde k l und traget selbige aus k auf den unterwärts befindlichen halben Zirkel k n m, so wird die Distanz k l aus k in n eintreffen, und also k n = k l seyn. Fasset ferner die Spannung oder Chorde des Bogens m l, und traget selbige aus m auf den unterwärts befindlichen halben Zirkel k n m, so wird die Distanz l m, wiederum in n eintreffen, und also der Bogen m n = dem Bogen m l seyn. Folglich ist auch der Bogen m n = Tab. I. Fig. 5.

dem Bogen lk. Derohalben theilet auch der verlängerte Perpendikel d e den unterwärts befindlichen halben Zirkel k n m in n in zwey gleiche Theile, et ergo hängt auch d e von a b in directione perpendiculari ab, und geht also d e mit c d in directione recta fort. Welches zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Tab. I. Fig. 5. Angulus f + angulo g = 180 Grad = dem halben Zirkel; denn auf einer jeden geraden Linie kann ein halber Zirkel beschrieben werden. Angulus f + angulo h = 180 Grad = dem halben Zirkel, aus vorerwähntem Grundsatze, ergo ist auch der Winkel g mit dem Winkel i zusammengenommen 180 Grad, denn sie haben beyde auch das Maaß eines halben Zirkels k n m, weil sie auf der geraden Linie a b stehen, ergo ist ferner auch der Winkel f = dem Winkel i, denn wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so sind sie sich selbsten gleich: siehe den ersten Band Regul. Arithm. 2. Item: wenn zwey gerade Linien a b und c e einander durchschneiden, so sind die Scheitelwinkel f und i, oder g und h, einander gleich: siehe den ersten Band Regul. Geometr. 15, ergo ist auch der Winkel g = dem Winkel h, und derowegen ist die gerade Linie c e, auf a b, eine durchschneidende Perpendikulärlinie.

Zusatz.

Zusatz.

Also läßt sich jeder Zirkel k l m n in vier gleiche Theile theilen.

Fünfter Lehrsatz.

Auf einer geraden Linie a b können aus deren Endpunkten a und b, nach dem Punkt c, nicht mehr gleich lange gerade Linien a c oder b c, als nur eine einzige, gezogen werden.

1. Beweis.

Wenn man demnach auf a b, aus b nach e, noch eine andere gerade Linie mit b c von gleicher Länge ziehen wollte, welche doch nicht über a c hinausgehen sollte, so ist es von selbsten klar und augenscheinlich, daß b d kürzer als b c. Welches das erste war. Tab. II. Fig. 6.

2. Beweis.

Wenn man diese beyden geraden Linien e g und f g, aus e und f, statt nach g zu ziehen, alle beyde unter dem Punkt g in h zusammenziehen wollte, und doch e h, und f h, die Länge der geraden Linien e g, und f g, behalten sollten, so ist es wieder klar, daß diese Linien e h und f h viel kürzer als die Linien e g und f g sind. Zöge man aber nur eine, als z. E. die Linie f g, durch h in ihrer gehörigen Länge, wie f i, so würde solche über den Punkt h hinauslaufen, und also wiederum Tab. II. Fig. 7.

nicht die Länge der geraden Linie f i aus f in h eintreffen können. Welches das zweyte war.

3. Beweis.

Tab. II. Fig. 8. Man zöge z. E. von der Grundlinie k l aus k und l die geraden Linien k n und l n, statt nach dem Punkte m, wie k m und l m, so ist es wieder augenscheinlich klar, daß solches unmöglich angeht, indem die gegebne Distanz k m viel länger als die gerade Linie k n, und hingegen die gerade Linie l m viel länger als die gerade Linie l n ist: woraus also erhellet, daß aus den Endpunkten einer gegebenen geraden Linie a b, oder c f, oder k l, nach einem dritten gegebenen Punkte c, g, m, nicht mehr als zwey gerade Linien a c, b c, oder e g, f g, oder k m, l m, von einer bestimmten Länge gezogen werden können. Item: daß zwey gerade Linien von einer determinirten Größe, wenn selbige aus den Endpunkten einer gegebenen geraden Linie gezogen werden, allezeit in einem gewissen Punkte eintreffen, oder zusammen kommen müssen. Welches das dritte und zu beweisen war.

B. Von den in einem Zirkel befindlichen geraden Linien.

Sechster Lehrsatz.

Der Diameter a b ist die größte gerade Linie, so in einem Zirkel a d i e b g h f gezogen werden kann.

1. Mechanischer Beweis.

Man nehme z. E. unter a einen beliebigen Punkt f in der Circumferenz des Zirkels a f h g b e i d an, und trage diese Distanz a f aus dem Endpunkte b des Diameters oder geraden Linie a b auf die Peripherie nach g, und ziehe die Distanz f g durch eine gerade Linie zusammen; nun fasse man die Länge der geraden Linie f g mit dem Zirkel, und trage selbige aus a auf den Diameter a b, so wird man finden, daß diese neue gerade Linie oder Chorde f g um etwas weniges kürzer, als der Diameter a b dieses Zirkels, weil der Punkt f ganz dichte bey dem Punkte a stehet, und f g mit a b parallel gehet; daß also f g von a b nicht weit entfernet ist. Setzet man nun ferner aus a und b, als aus den Endpunkten des Diameters a b, auf die Peripherie des Zirkels a d i e b g h f nach d und e eine größere Distanz als a f oder b g, und ziehet die neue Chorde d e, so wird man finden, wenn man ihre Länge d e mit dem Zirkel fasset, daß selbige Chorde d e noch kürzer, als die Chorde f g, ist; weil die Punkte d und e weiter von den Endpunkten des Diameters a b entfernet sind, als f und g von diesen Punkten a und b und so fort; denn je näher man also mit neuen Chorden nach den Punkten i oder h kommt, desto weiter entfernen sich selbige vom Diameter a b, und desto kürzer werden sie auch.

Tab. II. Fig. 9.

2. Mathematischer Beweis.

Tab. II. Fig. 9. Der Radius c d + dem Radio c e sind beyde zusammengenommen größer, als die gerade Linie oder Chorde d e; denn in jedwedem Triangel sind zwey Seiten zusammengenommen allemal größer, als die dritte. Der Radius c d ist = dem Radio c a, der Radius c e ist = dem Radio c b, ergo ist der Radius c d + dem Radio c e = dem Diameter a b; siehe den ersten Band Regul. Geometr. 61. et ergo ist der Diameter a b größer, als die gerade Linie oder Chorde d e. Der Bogen a d i e b ist = dem Bogen a f h g b, der Bogen f h g ist kleiner, als der Bogen a f h g b, und der Bogen d i e ist kleiner, als der Bogen a d i e b, ergo ist auch die Chorde d e kleiner, als die Chorde f g, und die Chorde f g ist derohalben auch kleiner, als der Diameter a b. Welches das erste war.

Ergo je größer die Chorden d e oder f g, je gleicher und näher sie auch dem Diameter a b kommen, und je größer diese Chorden in einem halben Zirkel sind, desto größer sind auch ihre respective Bogen; also ist der Bogen f h g der Chorde f g größer, als der Bogen d i e der Chorde d e. Welches das zweyte war.

Tab. II. Fig. 10. Ergo je kleiner die Chorden a b, c d, e f, desto kleiner sind auch derselben an der Peripherie a c e f d b g in g stehende Winkel a g b, c g d, e g f. Welches das dritte war. Und folglich ist

Tab. II. Fig. 11.

auch

auch die gerade Linie oder der Diameter ab des Zirkels acbe, gegen den rechten Winkel f über, größer, als die dem Winkel g am Centro d gegen überliegende gerade Linie oder Chorde cb, und da die Chorde ac kleiner, als die Chorde cb, so ist auch der neben dem Winkel g am Centro d auf ab stehende Winkel h aus eben diesem Grunde kleiner, als der Winkel g. Et ergo ist auch die gerade Linie ab des Triangels acb, gegen den Winkel d über, größer, als die Linie cb, so den Winkel e unterspannet. Welches das vierte und zu beweisen war. Tab. II. Fig. 12.

Siebenter Lehrsatz.

Je weiter sich die geraden Linien oder Chorden entweder parallel, wie cd, ef, gh, oder als Winkel, wie ib und kb, von ihrem Diameter ab entfernen, je kürzer sind sie auch.

1. Mechanischer Beweis.

Man ziehe nach Willkühr mit ab, als dem Diameter des Zirkels acegmhfdbnki, in dem obern halben Zirkel amb einige Parallelen cd, ef, gh, und einige Chorden oder gerade Linien ib und kb in dem untern halben Zirkel anb, in den Endpunkt b des Diameters ab, als Winkel zusammen, und fasse hernach jedwede von den Parallelen cd, ef, gh, oder von den geraden Linien ib und kb besonders, und trage selbige aus a auf den Diameter ab, so wird Tab. III. Fig. 13.

 man

man finden, daß eine jede dieser Chorden kürzer, als der Diameter ab, ist. Und je näher diese Parallelen cd, ef, gh dem in der Peripherie stehenden Punkt m kommen, und je mehr sich die geraden Linien ib und kb dem in der Peripherie befindlichen Punkt n nähern, oder, welches gleich viel ist, je mehr sich beyderseitige über und unter dem Diameter ab stehende Parallelen cd, ef, gh, oder Chorden ib und kb, von diesem Diameter ab entfernen, je kürzer sind sie auch. Welches zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Tab. III. Fig. 13. Weil die Bogen cmd, emf, gmh, inb, und knb kleiner, als ihre respectiven halben Zirkel acegmhfdb und aiknb, sind, so sind folglich auch die Chorden cd, ef, gh, ib, und kb kleiner, als der Diameter ab, weil selbiger durchs Centrum l, und also mitten durch den Zirkel, durchgehet. Welches das erste war.

Und so wie die Bogen knb, iknb, cmd, emf, gmh nach und nach kleiner werden, so sind auch derselben respective Chorden kb, ib, cd, ef, gh kleiner. Welches das dritte und zu beweisen war.

Achter Lehrsatz.

Tab. III. Fig. 14. Die Perpendikularlinie ab, welche die Chorde cd in e in zwey gleiche Theile theilet,

gehet

gehet durchs Centrum f, und theilet also auch den Bogen cad in zwey gleiche Theile, und weil diese Perpendikular ab durchs Centrum f gehet, so theilet sie auch den großen Bogen cgbhd in b, und folglich auch den ganzen Zirkel acgb hda in a und b in zwey gleiche Theile.

1. Mechanischer Beweis.

Man fasse die Spannung des Zirkelbogens ac mit dem Zirkel, und trage selbige aus a auf die andere Seite des Bogens cad nach d, so wird man finden, daß ad so groß wie ac ist. Da nun die gerade Linie af der Radius des Bogens cad, welcher zugleich ein Theil der Perpendikulärlinie ab ist, so ist klar, daß, wenn man af durch den Zirkel bis b verlängert, und aus f mit dem Radio fc oder fd den ganzen Zirkel cadhbg ziehet, diese Perpendikulärlinie ab auch sodann den großen Bogen cgbhd in b in zwey gleiche Theile theilet. Da nun das Segmentum cad mit dem Segmento cgbhd einen ganzen Zirkel ausmacht, so theilet folglich auch diese Perpendikulärlinie oder Diameter ab den ganzen Zirkel acgbhd in a und b in zwey gleiche Theile.

2. Mathematischer Beweis.

Weil ce = ed und ae = ae, denn jede Größe ist sich selbsten gleich, und ae auch eine Perpendikulärlinie auf cd ist; ergo ist der Winkel i = dem Winkel k, = 90 Grad = dem Tab. III. Fig. 14.

dem rechten Winkel, siehe den vierten Lehrsatz, Fig. 5, und der Winkel abc = dem Winkel abd; denn wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so sind sie sich selbsten gleich. Siehe den ersten Theil Regul. Arithm. 2. Welches das erste war. cb = db, ergo ist auch der Bogen cgb dem Bogen dhb gleich; denn gleiche Chorden sind in gleichen Zirkeln gleichen Bogen unterspannt: und der Bogen bgc + dem Bogen ca ist = dem Bogen bhd + dem Bogen da; denn wenn man gleiches zu gleichem addiret, so sind die Summen gleich, siehe den ersten Theil Regul. Arithm. 11. Welches das zweyte war. ab = ab, = diametro et perpendiculari; denn jede Größe ist sich selbsten gleich. fc = fd; denn alle Radii eines Zirkels sind einander gleich. Siehe den ersten Band Regul. Geometr. 59. fe = fe ergo ce; = ed, et angulus cfa = angulo dfa. Et ergo ist der Bogen ca = dem Bogen da, und der Bogen bgc = dem Bogen bhd, und der halbe Zirkel acgb = dem halben Zirkel adhb. Welches das dritte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Derohalben hat eine jede Perpendikulärlinie ab, so die Chorde cd in e und ihrem Bogen cad in a accurat halbiret, ihre Direction durchs Centrum f: und ist sodann ea eine wahre Sagitta oder Pfeillinie auf der Chorde cd.

Zweyter

Zweyter Zusatz.

Aus diesem Grunde kann man leicht das Centrum finden, um drey in nicht gerader Linie liegende gegebene Punkte in einen Zirkel einzuschließen.

Dritter Zusatz.

So kann man auch ganz leicht um einen jedweden gegebenen Triangel, er sey von was Geschlecht oder Art er wolle, einen Zirkel beschreiben.

Vierter Zusatz.

Also haben gleiche Chorden oder Sennen eines Zirkels auch gleiche Bogen.

Fünfter Zusatz.

Ergo kann man aus einem gegebenen Polygonwinkel und einer Seite den Zirkel dazu finden. Tab. III Fig. 15.

Sechster Zusatz.

Weil also ein jeder Triangel in einen Zirkel gebracht werden kann, so sind dessen Seiten auch als Chorden eines Zirkels zu betrachten, indem jedwedes Eck des Triangels in selbigem anstößt.

Siebenter Zusatz.

Sind demnach die Seiten eines Triangels gleich, so sind auch derselben Bogen gleich; sind aber die Seiten auf eine gewisse Art gegen einander proportionirt, so verhalten sich derselben respective Bogen gegen einander, wie ihre Chorden oder die Seiten dieses Triangels.

Neunter Lehrsatz.

Wenn in der Peripherie acbf eines Zirkels zwey Punkte a und b nach Willkühr angenommen werden, und selbige Punkte durch eine gerade Linie ab an einander gehängt worden, so stehet diese gerade Linie ab ganz und gar im Zirkel acbf.

1. Mechanischer Beweis.

Tab. III. Fig. 15.

Wenn die gerade Linie ab, so aus der Zusammenhängung der beyden Punkte a und b, im Zirkel acbf, entstanden, nicht in diesen Zirkel selbsten fallen sollte, so müßte man beyde Punkte a und b durch eine krumme Linie, wie ohngefähr der Bogen adb, oder durch einen noch flächern Bogen aneinanderhängen; als wodurch der Satz, daß die Linie ab eine gerade Linie seyn soll, wegfällt.

Also ist klar, daß, wenn ab eine gerade Linie seyn soll, oder wenn man die in der Peripherie

rie des Zirkels willkührlich angenommenen zwey Punkte a und b durch eine gerade Linie ab zusammenhängen soll, selbige Linie nothwendiger Weise in den Zirkel acbf hineinfallen müsse.

2. Mathematischer Beweis.

Der Abschnittswinkel h ist = dem Abschnittswinkel i, der gemischtlinigte Winkel k ist größer, als der Abschnittswinkel h oder i, der Radius gf ist kleiner als die gerade Linie gd, der Radius gf ist = dem Radio ga oder gb: denn alle Radii eines Zirkels sind einander gleich, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 59. Ergo ist auch die gerade Linie gd größer als der Radius ga oder gb; denn was größer ist als eine von zwey gleichen Größen, ist auch größer als die andere von selbigen, siehe den ersten Band Regul. Arithm. 3. Und derohalben stehet die gerade Linie ab ganz und gar im Zirkel. Welches zu beweisen war. Tab. III. Fig. 15.

Zehnter Lehrsatz.

Wenn sich in einem Zirkel abgcdf zwey gerade Linien ac und bd, so nicht durchs Centrum e gehen, in h durchschneiden, so theilen diese zwey geraden Linien ac und bd einander nicht in zwey gleiche Theile.

1. Mecha-

I. Mechanischer Beweis.

Tab. III. Fig. 16. Um dieses zu beweisen, so reißet man aus einem willkührlich angenommenen Punkte oder Centro e einen ganzen Zirkel abgcdf, und in selbigem den Diameter fg. Auf diesem Diameter fg erwählet man sich wiederum einen willkührlichen Punkt h, durch welchen man zwey sich durchschneidende gerade Linien ac und bd ziehet. Da nun laut dem ersten Bande Regul. Geom. bekannt, daß das Centrum e allezeit in der Mitte seines Zirkels afdcgb aufstehet, so ist hierdurch schon klar, daß die zwey geraden Linien ac und bd sich nicht in ihrer Mitte durchschneiden können, weil sie nicht durch das Centrum e gehen. Welches das erste war.

Um nun dieses weiter zu beweisen, so messe man hb, und trage diese Länge aus h nach d. Man messe ferner hc, und trage diese Distanz aus h nach a, so wird man wieder finden, daß bh kleiner, als hd, und ha größer als hc ist. Welches das zweyte war.

Ferner ist der Bogen gb = dem Bogen gc, der Winkel i ist = dem Winkel k, und der Winkel h ist = dem Winkel l. Nun ist der Bogen ba = dem Bogen cd, der Bogen afd aber ist größer als der Bogen bgc. Da nun der Winkel i = dem Winkel k, so sollte auch die Chorde bc der Chorde ad gleich seyn, wenn sich die zwey geraden Linien ac und bd in ihrer

Mitte

Mitte durchschnitten. Da aber die Chorde ad, sammt dem Bogen afd, welchem sie unterspannet ist, größer ist, als die Chorde bc, sammt ihrem Bogen bgc, so ist es auch wiederum klar, daß hb und hc kleiner sind, als ha und hd, und also der Durchschnittspunkt h nicht in die Mitte der geraden sich durchschneidenden Linien ac und bd falle. Welches das zweyte und zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Weil der Durchschnittspunkt h der im Zirkel abgcdf sich durchschneidenden geraden Linien ac und bd vom Centro e abstehet, der Winkel h aber kleiner ist, als der Winkel i, und doch beyde zusammengenommen auf der geraden Linie ac stehen, und also beyde = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln; denn sie haben einen halben Zirkel zu ihrem Maaße, weil auf jeder geraden Linie aus einem angenommenen Punkte auf selbiger, ein halber Zirkel beschrieben werden kann, s. den ersten Band Regul. Geometr. 21.; so folget auch, daß der Winkel h = dem Winkel l, und der Winkel i = dem Winkel k ist. Denn wenn zwey gerade Linien ac und bd einander durchschneiden, so sind die Scheitelwinkel einander gleich, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 15.: ergo ist auch der Bogen abc = dem Bogen bcd. Welches das erste war. Tab. III. Fig. 16.

Der Diameter fg ist = fg, denn jede Größe ist sich selbsten gleich, siehe den ersten Band Regul. Arithm. 1.; und der Radius ef, ist = dem Radio eg, der Bogen fd ist größer, als der Bogen bg, ergo ist die gerade Linie dh auch größer, als die gerade Linie hb, und der Bogen fa ist größer, als der Bogen gc. Ergo ist die gerade Linie ha auch größer, als die gerade Linie hc, ergo liegt der Durchschnittspunkt h auch nicht in der Mitte der geraden Linie ac oder bd. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Anmerkung.

Die geraden Linien ac und bd können auch von verschiedener Größe seyn, so findet ebenfalls dieser Lehrsatz und dessen Beweis Statt, im übrigen brauchte diese Figur gar keines Beweises, oder Demonstration; denn es ist augenscheinlich klar, daß der Durchschnittspunkt h dieser sich durchschneidenden geraden Linie ac und bd nicht in der Mitte selbiger Linien liegt; derohalben habe ich auch diese Anmerkung zufügen wollen, und bloß den mechanischen Beweis dieserwegen beygesetzt, um dadurch auch den schwächesten Köpfen nach aller Möglichkeit zu helfen. Derjenige aber, welcher ja noch nicht einsieht, daß der Durchschnittspunkt h nicht in der Mitte der Linien ac oder bd liegt, kann zu mehrerem Beweis einen Zirkel nehmen, und die Distanzen hc und hb aus h nach a und d tragen, so wird er dessen klärlich überführet werden, wenn er sehen wird, daß ha und hd viel länger als hb und hc sind.

Eilfter Lehrsatz.

Wenn sich in einem Zirkel a b c d e zwey Chorden, a c und b d, in einem Punkt f durchschneiden, so verhalten sich die großen Theile f c und f d zu einander, wie die kleineren Theile f a und f b, wenn nämlich der Durchschnittspunkt f dieser beyden ungleich langen Chorden b d und a c nicht in dem Centro o liegt; in welchem Falle sie sonsten Durchmesser des Zirkels b a e d c werden; und folglich von gleicher Größe seyn würden.

Beweis.

Der Winkel g ist = dem Winkel h, und der Winkel f ist = dem Winkel n; siehe hiervon den ersten Band Regul. Geometr. 15. Der Winkel g ist = dem Winkel h, und der Winkel i ist = dem Winkel k, der Durchschnittswinkel f ist = dem Winkel n; ergo ist der Winkel m auch = dem Winkel l; et ergo ist der Triangel a f b ähnlich dem Triangel d f c; denn alle Triangel oder Dreyecke sind einander ähnlich, wenn in selbigen alle drey gleichnamige Winkel einander gleich sind. Dieserhalben verhält sich f a zu a b, wie f d zu d c; ferner verhält sich auch a b zu b f, wie d c zu c f; et ergo verhält sich auch a f zu f b, wie d f zu f c. Welches zu beweisen war. Tab. III. Fig. 17.

Zwölfter Lehrsatz.

Tab. III. Fig. 18. In einem jeden Zirkel aebicfdh sind die Chorden ab und dc gleicher Bogen aeb und dfc einander gleich, und weil die Bogen aeb und dfc gleich sind, so sind auch die Chorden ab und dc, und die übrigen beyden Bogen ahd und bic des Zirkels ahdfcibe einander gleich.

1. Mechanischer Beweis.

Nehmet mit einem Zirkel die Länge der geraden Linien oder Chorden ab oder cd, und passet eine auf die andere, so werdet ihr finden, daß sie einander gleich sind, und zwar weil die geraden Linien ac und bd durchs Centrum l gehen, und also Durchmesser dieses Zirkels ahdfcibe sind. Da nun diese beyden einander gegen über liegenden Bogen aeb und dfc einander gleich sind, weil der Winkel g = dem Winkel k, so folget schlüßlich, daß auch der Bogen ahd dem Bogen bic gleich seyn muß, welches man durch den Zirkel beweisen kann: weil der Winkel l = dem Winkel m, und beydes Scheitelwinkel sind, so sich in dem Centro k des Zirkels aebicfdh durchschneiden.

2. Mathematischer Beweis.

Tab. III. Fig. 18. Der Radius ka ist = dem Radio kb, = dem Radio kc, = dem Radio kd; denn alle

Radii

Radii eines Zirkels sind einander gleich; siehe hiervon den ersten Band Regul. Geometr. 59. Der Winkel k ist = dem Winkel g; denn wenn zwey gerade Linien einander durchschneiden, so sind die Scheitelwinkel einander gleich; siehe den ersten Band Regul. Geometr. 15. Der Winkel n ist = dem Winkel q, und der Winkel o ist = dem Winkel p. Ergo ist der Bogen a e b dem Bogen d f c gleich; denn gleichen Bogen eines Zirkels sind gleiche Chorden unterspannt. Welches zu beweisen war.

Dreyzehnter Lehrsatz.

Wenn sich zwey Zirkel a b c d und e c f a in a und c durchschneiden, so haben sie nicht ein gemeinschaftliches Centrum g oder h.

1. Mechanischer Beweis.

Man nehme einen Zirkel, und reiße damit aus einem angenommenen willkührlichen Centro g einen Zirkel a b c d. Wollte man nun aus eben diesem Centro g noch einen andern Zirkel ziehen, so würde dieses nicht angehen; denn nimmt man gleiche Zirkelspannung zum Radio an, so wird der zweyte Zirkel auf den ersten fallen, und selbigen decken. Nimmt man einen kleinern Radium als g a ist, so wird der durch diesen kleinern Radium g a in dem gegebenen Zirkel a d c b parallel laufen, und ganz in selbigem stehen. Tab. IV. Fig. 19.

Reißet man aber mit einem größern Radio, als g a, aus g einen Zirkel, so wird dieser neue Zirkel um den gegebenen herumlaufen, und selbigem von außen parallel seyn: also können sich niemalen zwey aus einem Centro gezogene Zirkel durchschneiden; wohl aber, wenn man einen andern Mittelpunkt, wie z. E. das Centrum h ist, über, oder unter, oder neben dem Centro g annimmt, und aus selbigem den Zirkel a e c f durch einen mit g a gleichgroßen Radium h c beschreibt.

2. Mathematischer Beweis.

Tab. IV. Fig. 19. Der Radius g a ist = dem Radio g d, und der Radius h f ist = dem Radio h c; h d ist kleiner als g d, und g f ist größer als h d. Der Radius h f ist = dem Radio h c, und der Radius g d ist = dem Radio g a: ergo ist h das Centrum des Zirkels a e c f, und g ist das Centrum des Zirkels a d c b; folglich müssen zwey sich durchschneidende Zirkel a f c e und a d c b excentrische Zirkel seyn, das ist, zwey verschiedene Centra g und h haben, aus denen sie beschrieben werden können.

Vierzehnter Lehrsatz.

Wenn sich zwey Zirkel a b c und d h e c im Punkt c von innen berühren oder küssen, so haben sie nicht ein gemeinschaftliches Centrum f oder g, sondern sie sind sodann excentrische Zirkel.

1. Mechanischer Beweis.

Wenn man z. E. zwey Zirkel abc und cde ziehen wollte, die sich in c von innen küssen oder berühren sollten, und man wollte beyde Zirkel aus dem Centro f des großen Zirkels abc ziehen, so würde ein Zirkel auf den andern fallen, selbigen decken, und also nicht küssen; folglich muß man das Centrum g zu dem Zirkel cde, welcher den Zirkel abc in c küssen soll, auf dem Radio fc unter dem Centro f in g annehmen, und also aus g mit dem Radio gc den kleinen Zirkel cde, welcher den größern abc in c küssen soll, ziehen. Da nun das Centrum g nicht in dem Centro f liegt; so haben die beyden sich von innen in c berührenden oder küssenden Zirkel abc und cdhe kein gemeinschaftliches Centrum f oder g. Tab. IV. Fig. 20.

2. Mathematischer Beweis.

Der Radius fa ist = dem Radio fc, der Radius ge ist = dem Radio gc, der Radius fc ist um das Theil fg größer, als der Radius ge, und der Radius fh ist um das Theil fg kleiner, als der Radius ge, der Radius fa ist auch um das Theil fg kleiner, als der Radius ge: ergo ist das Punktum f das Centrum des Zirkels abc, und das Punktum g das Centrum des Zirkels dce: ergo haben beyde Zirkel abc und cdhe kein gemeinschaftliches Centrum f oder g, Tab. IV. Fig. 20.

das ist: das Centrum f wird nicht vom Centro g gedecket. Welches zu beweisen war.

Funfzehnter Lehrsatz.

Wenn in einem Zirkel a c e h f d b a ein Punkt g auf dem Diameter a h über oder unter dem Centro i, als wie allhier in g, aufgesetzt wird, so ist diese von selbigem Punkt g durch das Centrum i bis an die Peripherie in a gezogene gerade Linie g a die längste, in Ansehung der andern g b, g c, g d, g e, so aus eben dem Punkte g bis in die Peripherie in b, c, d, e, aber nicht durchs Centrum i, gezogen worden sind; welches auch nicht möglich gewesen wäre, weil es sodann nicht gerade, sondern gebrochene Linien würden geworden seyn; und je weiter sich gedachte in der Peripherie befindliche Punkte b, c, d, e, vom Endpunkte a des Diameters a h entfernen, je kürzer sind auch diese Linien g b, g c, g d, g e, g f, g h.

1. Mechanischer Beweis.

Tab. IV. Fig. 21. Weil sich die gerade Linie a g in i bricht, und sich der Theil i a aus a auf der Peripherie bis b beweget, und einen Winkel b i g formirt, so ist klar, daß die gerade Linie g b kürzer seyn muß, als die gerade Linie g a; denn g i b ist ein Dreyeck. Da nun in diesem Dreyeck g i b, die beyden Seiten oder Schenkel g i + i b zusammengenommen größer sind, als die gerade Linie g b, so folget

folget auch, daß gb kürzer seyn muß, als ga, weil gi + ib = gi + ia, denn sonsten könnte das Dreyeck gib nicht bestehen, denn in einem jedweden Triangel, er sey von was vor Geschlecht er wolle, müssen zwey Seiten zusammengenommen allezeit größer, als die dritte, seyn. Welches das erste war.

Da nun der Bogen ab kleiner, als der Bogen ac, weil der in der Peripherie befindliche Punkt c weiter, als der Punkt b, von a entfernet ist; so folget auch, daß die gerade Linie gc kürzer, als die gerade Linie gb, seyn muß; denn der Winkel gic ist kleiner, als der Winkel gib. Und da sich die gerade Linie ga in i wiederum gebrochen, und sich der Theil ia aus a gegen c beweget hat, so ist gi + ic zusammengenommen = ga. Nun ist gic wiederum ein Dreyeck, und in jedwedem Dreyeck sind zwey Seiten zusammengenommen allezeit größer, als die dritte; siehe den ersten Band Regul. Geometr. 44. Folglich ist gc auch kleiner, als gi und ic. Und da der Punkt c von a weiter, als der Punkt b, entfernet ist, so ist gc auch kleiner, als gb. Welches das zweyte war.

Der Bogen abd ist größer, als der Bogen ac, weil der Centriwinkel aid größer, als der Centriwinkel aic. Nun hat sich die gerade Linie ga wiederum in i gebrochen, und der Theil ia auf der Peripherie nach d bewegt, also ist durch die gezogene Linie gd mit gi und id wiederum

ein Triangel g i d entstanden, in welchem g i + i d zusammengenommen = g a; g d aber, als die unterspannte Linie des Winkels g i d, natürlicher Weise kleiner seyn muß, als g i + i d, ergo auch kleiner, als g a. Der Centriwinkel a i c ist aber auch kleiner, als der Centriwinkel a i d, folglich ist auch d g kleiner, als g c. Welches das dritte war.

Nun ist aus obigen Ursachen auch g e kürzer, als g d, weil der Bogen a c e größer ist, als der Bogen a b d; also stehet auch der Punkt e weiter, als der Punkt d, von a ab. Welches das vierte war.

Et ergo je weiter sich die geraden Linien g b, g c, g d, g e vom Punkt a und der geraden Linie g a entfernen, je kürzer sind sie auch. Welches das fünfte und zu beweisen war.

2. Mechanischer Beweis.

Tab. IV. Fig. 21.

Man kann noch auf eine andre Art durch den Zirkel mechanisch beweisen, daß die im Zirkel a b d f h e c befindlichen geraden Linien g b, g c, g d, g e, je weiter sich selbige von der geraden Linie g a entfernen oder wegwenden, nach und nach immer kleiner werden, oder sich verkürzen. Man nehme demnach den Zirkel, setze selbigen in g, und spanne ihn aus bis in a, sodann reiße man aus a einen Zirkel oder Zirkelbogen, dadurch wird der Zirkel a b d f h e c ein küssender,

oder

oder sich mit dem neuen von innen berührender Zirkel, und man wird sodann finden, daß keine von den geraden Linien g b, g c, g d, g e an die Peripherie dieses neuen Zirkels antreffen wird, ohngeachtet g a der Radius zu diesem neuen Zirkel ist. Welches das erste war.

Wollte man aber die gerade Linie g e zu einem neuen Radio annehmen, um mit selbigem aus g einen Zirkel zu reißen, so würden diese geraden Linien g c, g b, g d zwar Radii dieses neuen kleinen Zirkels werden, aber selbigen, so wie auch die gerade Linie g a, durchschneiden, und also um vieles, nach Proportion ihrer ersten Länge, über die Peripherie dieses neuen kleinen Zirkels hinauslaufen. Welches das zweyte war.

Also ist es klar, daß die aus einem in einem Zirkel a b d f h e c angenommenen Punkte g durch das Centrum i gezogene gerade Linie g a die längste gerade Linie, so in diesem Zirkel zu ziehen, möglich ist. Welches das dritte und zu beweisen war.

3. Mathematischer Beweis.

g i = g i, denn jede Größe ist sich selbsten gleich; i b = i a, denn alle Radii eines Zirkels sind einander gleich; g i + i b major als g b; ergo g a major als g b. Welches das erste war. g i = g i; i c = i b; a c major a b; g i + i c major g c; ergo g b major g c. Welches das zweyte war. Tab. IV. Fig. 21.

g i = g i,

gi=gi, id=ie, ad major als ac; ergo gd minor als gc. Welches das dritte war.

gi=gi, id=ie, Arcus ace major Arcu abd; ergo ge minor go. Welches das vierte und zu beweiſen war.

Erſter Zuſatz.

Derohalben je näher die geraden Linien ge, gd, gc, gb dem Punkt a, oder der geraden Linie ga, kommen, deſto länger ſind ſie auch.

Zweyter Zuſatz.

Derohalben können auch nicht mehr als zwey gleich lange gerade Linien ge oder gf, aus dieſem auf dem Diameter ah angenommenen Punkte g, zu beyden Seiten, winkelrecht, oder auch ſchrege bis an die Peripherie des Zirkels hfdbace nach f und l, gezogen werden.

Sechzehnter Lehrſatz.

Wenn außerhalb eines Zirkels abdkighc ein willkührlicher Punkt e angenommen wird, und von ſelbigem gerade Linien ea, eb, ec, ed in den concaven Theil cabd des Zirkels abdkighc gezogen werden, ſo iſt die längſte unter dieſen Linien die gerade ea, weil ſelbige durchs Centrum f gehet, und alſo im Diameter ga iſt.

1. Mechanischer Beweis.

Dieses ist sehr natürlich; denn der concave Theil cabd, oder vielmehr das Bogenstück des Zirkels, biegt sich in d und c näher gegen den von außen angenommenen Punkt e; denn weil ea durchs Centrum f gehet, so ist ag des Zirkels abdkigh Diameter oder Durchmesser, und folglich auch a der von dem Punkt e am weitesten entfernte Punkt. Das Nachmessen durch den Zirkel ist allhier nicht anzuführen nöthig, weil be augenscheinlich kürzer, als ae, und ce noch kürzer, als be, desgleichen de wieder kürzer, als ce, ist, wie man deutlich ohne Nachmessen siehet. Welches zu beweisen war. Tab. IV. Fig. 22.

2. Mathematischer Beweis.

fe = fe, denn jede Größe ist sich selbsten gleich; siehe den ersten Band Regul. Arithm. 1. Der Radius fa ist = dem Radio fb; ergo ef + fb = der langen geraden Linie ea; et ergo ist auch ea größer, als eb; siehe den funfzehnten Lehrsatz Fig. 21. Welches das erste war. fc = fb, fe = fe, der Bogen ac ist größer, als der Bogen ab; ergo ist auch ec kleiner oder kürzer, als die gerade Linie eb; siehe hiervon den vorhergehenden Lehrsatz Fig. 21. fe = fe, fc = fd, der Bogen abd ist größer, als der Bogen ac; ergo ist auch ed kleiner oder kürzer, als ec. Welches das zweyte war. Tab. IV. Fig. 22.

ae = ae,

ae = ae, = der geraden Linie, ergo ag = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln, = dem halben Zirkel, weil auf jedweder geraden Linie ein halber Zirkel beschrieben werden kann. Siehe hiervon den ersten Band Regul. Geometr. 58. Welches das dritte war.

fa = fb, ef = fe, ea = ef + fb, ergo ist der Winkel l oder bfe kleiner, als die gerade Linie afe, et ergo ist auch ea größer als eb. Welches das vierte war.

ea = ea, fa = fc, ef + fc = ea. Der Winkel l oder efb ist größer, als der Winkel m, oder sein gleicher efc; ergo ist auch die gerade Linie eb größer, als die gerade Linie ec. Welches das fünfte war.

ea = fd + fe, der Winkel n oder sein gleicher dfe ist kleiner, als der Winkel m, oder sein gleicher efc; ergo ist auch die gerade Linie ed kürzer, als die gerade Linie ec. Welches das sechste und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Folglich je näher die geraden Linien eb, ec, ed der geraden Linie ea, so durchs Centrum f gehet, kommen, desto länger sind sie auch.

Zweyter Zusatz.

Folglich ist die gerade Linie ed die kürzeste gegen die andern drey Linien ec, eb und ea, weil

sie

sie am weitesten mit ihrem Endpunkte d von dem in der Peripherie stehenden Punkt a entfernet ist; denn der Bogen a b d ist größer, als der Bogen ac, und der Bogen a c ist größer, als der Bogen a b.

Dritter Zusatz.

Derohalben können aus einem außerhalb eines Zirkels a b d k i g h c willkührlich angenommenen Punkte e nicht mehr, als zwey gleichlange gerade Linien, in den hohlen oder concaven Theil dieses Zirkels gezogen werden.

Vierter Zusatz.

Derohalben können auch nicht mehr, als zwey gleichlange gerade Linien, aus dem Punkt e auf den ausgebogenen Theil oder Convexität k i g h des Zirkels a c h g i k d b gezogen werden. Tab. IV. Fig. 23.

Fünfter Zusatz.

Unter den geraden Linien e k, e h, e i, e g ist die kürzeste die gerade Linie e g, weil selbige mit dem Diameter g a in directione recta oder schnurgerader Richtung durch das Centrum f durchgehet.

Sechster Zusatz.

Je größer demnach die Bogen g k, g h, g i des convexen Theils k i g h des Zirkels a c h g i k d b

db sind, desto länger sind auch derselben Linien ke, ie, ge, he, so von e aus die in der Peripherie dieses Zirkels stehenden Punkte k, h, i, g berühren.

Siebenzehnter Lehrsatz.

Wenn in einem Zirkel aegcfbh ein ungefährer Punkt d eingesetzt wird, und von selbigem Punkt d mehr denn zwey gleichlange gerade Linien dc, db, da in gedachtem Zirkel bis an dessen Circumferenz oder Umkreis gezogen werden können, so liegt dieser Punkt d just in dem Centro des Zirkels ahbfceg.

I. Mechanischer Beweis.

Tab. IV. Fig. 23. Wollte man mehr, als zwey gleichlange gerade Linien, aus einem auf dem Diameter gh willkührlich angenommenen Punkte m in die Peripherie des Zirkels ziehen, wie etwan die geraden Linien ma, mb, mc, so ist dieses nicht möglich, sondern augenscheinlich klar und sichtbar, daß die gerade Linie mc größer, als mb oder ma ist. Weil der Punkt m nicht in dem Centro d liegt, so können auch nicht alle Punkte, so in dem Bogenstück ahbfc des Zirkels aegcfbh befindlich, von diesem neu angenommenen Punkte m gleich weit abstehen. Denn es sind nur alle in der Peripherie eines Zirkels möglich anzunehmende Punkte vom Centro d gleich weit entfernet; siehe hiervon den ersten Band Regul.

gul. Geometr. 65. Um nun dieses mechanisch zu beweisen, daß man nur zwey gleichlange gerade Linien ma und mb aus einem in einem Zirkel willkührlich angenommenen und nicht in dem Centro d liegenden Punkte m ziehen könne; so ziehet eine gerade Linie mh, traget aus h zu beyden Seiten nach a und b eine egale Distanz, und ziehet die geraden Linien ma und mb, welche gleich groß seyn werden. Da nun mh die kürzeste gerade Linie gegen die beyden andern ma und mb, welche gleich groß sind, ist: so ist natürlicher Weise zu schließen, daß auch die Punkte a und b weiter, als der Punkt h, von m entfernet seyn müsse.

Nun ist also völlig klar, daß sich das übrige Bogenstück bfc dieses Zirkels vom Punkte m noch weiter entfernet, also muß auch die gerade Linie mc länger, als ma oder mb, seyn. Welches zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Der Bogen fc ist = dem Bogen fb; cb = cb; fd = fd; perpendikulär auf cb; ergo ist der Winkel k = dem Winkel l = 90 Grad, et ergo ist dc = db. Welches das erste war. Der Bogen ha ist = dem Bogen hb; und der Radius hd ist sich selbsten gleich, und stehet auf der Chorde ab des Bogens ahb, in directione perpendiculari, dh = df; ib = ia; ergo bd = ad; Tab. IV. Fig. 23.

1. Mechanischer Beweis.

Tab. III. Fig. 16. Um dieses zu beweisen, so reißet man aus einem willkührlich angenommenen Punkte oder Centro e einen ganzen Zirkel a b g c d f, und in selbigem den Diameter f g. Auf diesem Diameter f g erwählet man sich wiederum einen willkührlichen Punkt h, durch welchen man zwey sich durchschneidende gerade Linien a c und b d ziehet. Da nun laut dem ersten Bande Regul. Geom. bekannt, daß das Centrum e allezeit in der Mitte seines Zirkels a f d c g b aufstehet, so ist hierdurch schon klar, daß die zwey geraden Linien a c und b d sich nicht in ihrer Mitte durchschneiden können, weil sie nicht durch das Centrum e gehen. Welches das erste war.

Um nun dieses weiter zu beweisen, so messe man h b, und trage diese Länge aus h nach d. Man messe ferner h c, und trage diese Distanz aus h nach a, so wird man wieder finden, daß b h kleiner, als h d, und h a größer als h c ist. Welches das zweyte war.

Ferner ist der Bogen g b = dem Bogen g c, der Winkel i ist = dem Winkel k, und der Winkel h ist = dem Winkel l. Nun ist der Bogen b a = dem Bogen c d, der Bogen a f d aber ist größer als der Bogen b g c. Da nun der Winkel i = dem Winkel k, so sollte auch die Chorde b c der Chorde a d gleich seyn, wenn sich die zwey geraden Linien a c und b d in ihrer

Mitte durchschnitten. Da aber die Chorde ad, sammt dem Bogen afd, welchem sie unterspannet ist, größer ist, als die Chorde bc, sammt ihrem Bogen bgc, so ist es auch wiederum klar, daß hb und hc kleiner sind, als ha und hd, und also der Durchschnittspunkt h nicht in die Mitte der geraden sich durchschneidenden Linien ac und bd falle. Welches das zweyte und zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Weil der Durchschnittspunkt h der im Zirkel abgcdf sich durchschneidenden geraden Linien ac und bd vom Centro e abstehet, der Winkel h aber kleiner ist, als der Winkel i, und doch beyde zusammengenommen auf der geraden Linie ac stehen, und also beyde = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln; denn sie haben einen halben Zirkel zu ihrem Maaße, weil auf jeder geraden Linie aus einem angenommenen Punkte auf selbiger, ein halber Zirkel beschrieben werden kann, s. den ersten Band Regul. Geometr. 21.; so folget auch, daß der Winkel h = dem Winkel l, und der Winkel i = dem Winkel k ist. Denn wenn zwey gerade Linien ac und bd einander durchschneiden, so sind die Scheitelwinkel einander gleich, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 15.: ergo ist auch der Bogen abc = dem Bogen bcd. Welches das erste war. Tab. III. Fig. 16.

Der Diameter fg ist = fg, denn jede Größe ist sich selbsten gleich, siehe den ersten Band Regul. Arithm. 1.; und der Radius ef, ist = dem Radio eg, der Bogen fd ist größer, als der Bogen bg, ergo ist die gerade Linie dh auch größer, als die gerade Linie hb, und der Bogen fa ist größer, als der Bogen gc. Ergo ist die gerade Linie ha auch größer, als die gerade Linie hc, ergo liegt der Durchschnittspunkt h auch nicht in der Mitte der geraden Linie ac oder bd. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Anmerkung.

Die geraden Linien ac und bd können auch von verschiedener Größe seyn, so findet ebenfalls dieser Lehrsatz und dessen Beweis Statt, im übrigen brauchte diese Figur gar keines Beweises, oder Demonstration; denn es ist augenscheinlich klar, daß der Durchschnittspunkt h dieser sich durchschneidenden geraden Linie ac und bd nicht in der Mitte selbiger Linien liegt; derohalben habe ich auch diese Anmerkung zufügen wollen, und bloß den mechanischen Beweis dieserwegen beygesetzt, um dadurch auch den schwächesten Köpfen nach aller Möglichkeit zu helfen. Derjenige aber, welcher ja noch nicht einsieht, daß der Durchschnittspunkt h nicht in der Mitte der Linien ac oder bd liegt, kann zu mehrerem Beweis einen Zirkel nehmen, und die Distanzen hc und hb aus h nach a und d tragen, so wird er dessen klärlich überführet werden, wenn er sehen wird, daß ha und hd viel länger als hb und hc sind.

Eilfter Lehrsatz.

Wenn sich in einem Zirkel a b c d e zwey Chorden, a c und b d, in einem Punkt f durchschneiden, so verhalten sich die großen Theile f c und f d zu einander, wie die kleineren Theile f a und f b, wenn nämlich der Durchschnittspunkt f dieser beyden ungleich langen Chorden b d und a c nicht in dem Centro o liegt; in welchem Falle sie sonsten Durchmesser des Zirkels b a e d c werden; und folglich von gleicher Größe seyn würden.

Beweis.

Der Winkel g ist = dem Winkel h, und der Winkel f ist = dem Winkel n; siehe hiervon den ersten Band Regul. Geometr. 15. Der Winkel g ist = dem Winkel h, und der Winkel i ist = dem Winkel k, der Durchschnittswinkel f ist = dem Winkel n; ergo ist der Winkel m auch = dem Winkel l; et ergo ist der Triangel a f b ähnlich dem Triangel d f c; denn alle Triangel oder Dreyecke sind einander ähnlich, wenn in selbigen alle drey gleichnamige Winkel einander gleich sind. Dieserhalben verhält sich f a zu a b, wie f d zu d c; ferner verhält sich auch a b zu b f, wie d c zu c f; et ergo verhält sich auch a f zu f b, wie d f zu f c. Welches zu beweisen war. Tab. III. Fig. 17.

Zwölfter Lehrsatz.

Tab. III. Fig. 18. In einem jeden Zirkel aebicfdh sind die Chorden ab und dc gleicher Bogen aeb und dfc einander gleich, und weil die Bogen aeb und dfc gleich sind, so sind auch die Chorden ab und dc, und die übrigen beyden Bogen ahd und bic des Zirkels ahdfcibe einander gleich.

1. Mechanischer Beweis.

Nehmet mit einem Zirkel die Länge der geraden Linien oder Chorden ab oder cd, und passet eine auf die andere, so werdet ihr finden, daß sie einander gleich sind, und zwar weil die geraden Linien ac und bd durchs Centrum l gehen, und also Durchmesser dieses Zirkels ahdfcibe sind. Da nun diese beyden einander gegen über liegenden Bogen aeb und dfc einander gleich sind, weil der Winkel g = dem Winkel k, so folget schlüßlich, daß auch der Bogen ahd dem Bogen bic gleich seyn muß, welches man durch den Zirkel beweisen kann: weil der Winkel l = dem Winkel m, und beydes Scheitelwinkel sind, so sich in dem Centro k des Zirkels aebicfdh durchschneiden.

2. Mathematischer Beweis.

Tab. III. Fig. 18. Der Radius ka ist = dem Radio kb, = dem Radio kc, = dem Radio kd; denn alle

Radii

Radii eines Zirkels sind einander gleich; siehe hiervon den ersten Band Regul. Geometr. 59. Der Winkel k ist = dem Winkel g; denn wenn zwey gerade Linien einander durchschneiden, so sind die Scheitelwinkel einander gleich; siehe den ersten Band Regul. Geometr. 15. Der Winkel n ist = dem Winkel q, und der Winkel o ist = dem Winkel p. Ergo ist der Bogen a e b dem Bogen d f c gleich; denn gleichen Bogen eines Zirkels sind gleiche Chorden unterspannt. Welches zu beweisen war.

Dreyzehnter Lehrsatz.

Wenn sich zwey Zirkel a b c d und e c f a in a und c durchschneiden, so haben sie nicht ein gemeinschaftliches Centrum g oder h.

1. Mechanischer Beweis.

Man nehme einen Zirkel, und reiße damit aus einem angenommenen willkührlichen Centro g einen Zirkel a b c d. Wollte man nun aus eben diesem Centro g noch einen andern Zirkel ziehen, so würde dieses nicht angehen; denn nimmt man gleiche Zirkelspannung zum Radio an, so wird der zweyte Zirkel auf den ersten fallen, und selbigen decken. Nimmt man einen kleinern Radium als g a ist, so wird der durch diesen kleinern Radium g a in dem gegebenen Zirkel a d c b parallel laufen, und ganz in selbigem stehen. Tab. IV. Fig. 19.

Reißet man aber mit einem größern Radio, als ga, aus g einen Zirkel, so wird dieser neue Zirkel um den gegebenen herumlaufen, und selbigem von außen parallel seyn: also können sich niemalen zwey aus einem Centro gezogene Zirkel durchschneiden; wohl aber, wenn man einen andern Mittelpunkt, wie z. E. das Centrum h ist, über, oder unter, oder neben dem Centro g annimmt, und aus selbigem den Zirkel aecf durch einen mit ga gleichgroßen Radium hc beschreibt.

2. Mathematischer Beweis.

Tab. IV. Fig. 19. Der Radius ga ist = dem Radio gd, und der Radius hf ist = dem Radio hc; hd ist kleiner als gd, und gf ist größer als hd. Der Radius hf ist = dem Radio hc, und der Radius gd ist = dem Radio ga: ergo ist h das Centrum des Zirkels aecf, und g ist das Centrum des Zirkels adcb; folglich müssen zwey sich durchschneidende Zirkel afce und adcb excentrische Zirkel seyn, das ist, zwey verschiedene Centra g und h haben, aus denen sie beschrieben werden können.

Vierzehnter Lehrsatz.

Wenn sich zwey Zirkel abc und dhec im Punkt c von innen berühren oder küssen, so haben sie nicht ein gemeinschaftliches Centrum f oder g, sondern sie sind sodann excentrische Zirkel.

1. Mechanischer Beweis.

Wenn man z. E. zwey Zirkel abc und cde ziehen wollte, die sich in c von innen küssen oder berühren sollten, und man wollte beyde Zirkel aus dem Centro f des großen Zirkels abc ziehen, so würde ein Zirkel auf den andern fallen, selbigen decken, und also nicht küssen; folglich muß man das Centrum g zu dem Zirkel cde, welcher den Zirkel abc in c küssen soll, auf dem Radio fc unter dem Centro f in g annehmen, und also aus g mit dem Radio gc den kleinen Zirkel cde, welcher den größern abc in c küssen soll, ziehen. Da nun das Centrum g nicht in dem Centro f liegt; so haben die beyden sich von innen in c berührenden oder küssenden Zirkel abc und cdhe kein gemeinschaftliches Centrum f oder g. Tab. IV. Fig. 20.

2. Mathematischer Beweis.

Der Radius fa ist = dem Radio fc, der Radius ge ist = dem Radio gc, der Radius fc ist um das Theil fg größer, als der Radius ge, und der Radius fh ist um das Theil fg kleiner, als der Radius ge, der Radius fa ist auch um das Theil fg kleiner, als der Radius ge: ergo ist das Punktum f das Centrum des Zirkels abc, und das Punktum g das Centrum des Zirkels dce: ergo haben beyde Zirkel abc und cdhe kein gemeinschaftliches Centrum f oder g, Tab. IV. Fig. 20.

das ist: das Centrum f wird nicht vom Centro g gedecket. Welches zu beweisen war.

Funfzehnter Lehrsatz.

Wenn in einem Zirkel a c e h f d b a ein Punkt g auf dem Diameter a h über oder unter dem Centro i, als wie allhier in g, aufgesetzt wird, so ist diese von selbigem Punkt g durch das Centrum i bis an die Peripherie in a gezogene gerade Linie g a die längste, in Ansehung der andern g b, g c, g d, g e, so aus eben dem Punkte g bis in die Peripherie in b, c, d, e, aber nicht durchs Centrum i, gezogen worden sind; welches auch nicht möglich gewesen wäre, weil es sodann nicht gerade, sondern gebrochene Linien würden geworden seyn; und je weiter sich gedachte in der Peripherie befindliche Punkte b, c, d, e, vom Endpunkte a des Diameters a h entfernen, je kürzer sind auch diese Linien g b, g c, g d, g e, g f, g h.

1. Mechanischer Beweis.

Tab. IV. Fig. 21. Weil sich die gerade Linie a g in i bricht, und sich der Theil i a aus a auf der Peripherie bis b beweget, und einen Winkel b i g formirt, so ist klar, daß die gerade Linie g b kürzer seyn muß, als die gerade Linie g a; denn g i b ist ein Dreyeck. Da nun in diesem Dreyeck g i b, die beyden Seiten oder Schenkel g i + i b zusammengenommen größer sind, als die gerade Linie g b, so folget

folget auch, daß gb kürzer seyn muß, als ga, weil gi + ib = gi + ia, denn sonsten könnte das Dreyeck gib nicht bestehen, denn in einem jedweden Triangel, er sey von was vor Geschlecht er wolle, müssen zwey Seiten zusammengenommen allezeit größer, als die dritte, seyn. Welches das erste war.

Da nun der Bogen ab kleiner, als der Bogen ac, weil der in der Peripherie befindliche Punkt c weiter, als der Punkt b, von a entfernet ist; so folget auch, daß die gerade Linie gc kürzer, als die gerade Linie gb, seyn muß; denn der Winkel gic ist kleiner, als der Winkel gib. Und da sich die gerade Linie ga in i wiederum gebrochen, und sich der Theil ia aus a gegen c beweget hat, so ist gi + ic zusammengenommen = ga. Nun ist gic wiederum ein Dreyeck, und in jedwedem Dreyeck sind zwey Seiten zusammengenommen allezeit größer, als die dritte; siehe den ersten Band Regul. Geometr. 44. Folglich ist gc auch kleiner, als gi und ic. Und da der Punkt c von a weiter, als der Punkt b, entfernet ist, so ist gc auch kleiner, als gb. Welches das zweyte war.

Der Bogen abd ist größer, als der Bogen ac, weil der Centriwinkel aid größer, als der Centriwinkel aic. Nun hat sich die gerade Linie ga wiederum in i gebrochen, und der Theil ia auf der Peripherie nach d bewegt, also ist durch die gezogene Linie gd mit gi und id wiederum

ein Triangel gid entstanden, in welchem gi+id zusammengenommen = ga; gd aber, als die unterspannte Linie des Winkels gid, natürlicher Weise kleiner seyn muß, als gi+id, ergo auch kleiner, als ga. Der Centriwinkel aic ist aber auch kleiner, als der Centriwinkel aid, folglich ist auch dg kleiner, als gc. Welches das dritte war.

Nun ist aus obigen Ursachen auch ge kürzer, als gd, weil der Bogen ace größer ist, als der Bogen abd; also stehet auch der Punkt e weiter, als der Punkt d, von a ab. Welches das vierte war.

Et ergo je weiter sich die geraden Linien gb, gc, gd, ge vom Punkt a und der geraden Linie ga entfernen, je kürzer sind sie auch. Welches das fünfte und zu beweisen war.

2. Mechanischer Beweis.

Tab. IV. Fig. 21. Man kann noch auf eine andre Art durch den Zirkel mechanisch beweisen, daß die im Zirkel abdfhec befindlichen geraden Linien gb, gc, gd, ge, je weiter sich selbige von der geraden Linie ga entfernen oder wegwenden, nach und nach immer kleiner werden, oder sich verkürzen. Man nehme demnach den Zirkel, setze selbigen in g, und spanne ihn aus bis in a, sodann reiße man aus a einen Zirkel oder Zirkelbogen, dadurch wird der Zirkel abdfhec ein küssender,

oder sich mit dem neuen von innen berührender Zirkel, und man wird sodann finden, daß keine von den geraden Linien gb, gc, gd, ge an die Peripherie dieses neuen Zirkels antreffen wird, ohngeachtet ga der Radius zu diesem neuen Zirkel ist. Welches das erste war.

Wollte man aber die gerade Linie ge zu einem neuen Radio annehmen, um mit selbigem aus g einen Zirkel zu reißen, so würden diese geraden Linien gc, gb, gd zwar Radii dieses neuen kleinen Zirkels werden, aber selbigen, so wie auch die gerade Linie ga, durchschneiden, und also um vieles, nach Proportion ihrer ersten Länge, über die Peripherie dieses neuen kleinen Zirkels hinauslaufen. Welches das zweyte war.

Also ist es klar, daß die aus einem in einem Zirkel abdfhec angenommenen Punkte g durch das Centrum i gezogene gerade Linie ga die längste gerade Linie, so in diesem Zirkel zu ziehen, möglich ist. Welches das dritte und zu beweisen war.

3. Mathematischer Beweis.

gi = gi, denn jede Größe ist sich selbsten gleich; ib = ia, denn alle Radii eines Zirkels sind einander gleich; gi + ib major als gb; ergo ga major als gb. Welches das erste war. gi = gi; ic = ib; ac major ab; gi + ic major gc; ergo gb major gc. Welches das zweyte war. Tab. IV. Fig. 21.

gi = gi,

gi = gi, id = ie, ad major als ac; ergo gd minor als gc. Welches das dritte war.

gi = gi, id = ie, Arcus ace major Arcu abd; ergo ge minor go. Welches das vierte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Derohalben je näher die geraden Linien ge, gd, gc, gb dem Punkt a, oder der geraden Linie ga, kommen, desto länger sind sie auch.

Zweyter Zusatz.

Derohalben können auch nicht mehr als zwey gleich lange gerade Linien ge oder gf, aus diesem auf dem Diameter ah angenommenen Punkte g, zu beyden Seiten, winkelrecht, oder auch schrege bis an die Peripherie des Zirkels hfdbace nach f und l, gezogen werden.

Sechzehnter Lehrsatz.

Wenn außerhalb eines Zirkels abdkighc ein willkührlicher Punkt e angenommen wird, und von selbigem gerade Linien ea, eb, ec, ed in den concaven Theil cabd des Zirkels abdkighc gezogen werden, so ist die längste unter diesen Linien die gerade ea, weil selbige durchs Centrum f gehet, und also im Diameter ga ist.

1. Mechanischer Beweis.

Dieses ist sehr natürlich; denn der concave Theil c a b d, oder vielmehr das Bogenstück des Zirkels, biegt sich in d und c näher gegen den von außen angenommenen Punkt e; denn weil e a durchs Centrum f gehet, so ist a g des Zirkels a b d k i g h Diameter oder Durchmesser, und folglich auch a der von dem Punkt e am weitesten entfernte Punkt. Das Nachmessen durch den Zirkel ist allhier nicht anzuführen nöthig, weil b e augenscheinlich kürzer, als a e, und c e noch kürzer, als b e, desgleichen d e wieder kürzer, als c e, ist, wie man deutlich ohne Nachmessen siehet. Welches zu beweisen war. Tab. IV. Fig. 22.

2. Mathematischer Beweis.

f e = f e, denn jede Größe ist sich selbsten gleich; siehe den ersten Band Regul. Arithm. I. Der Radius f a ist = dem Radio f b; ergo e f + f b = der langen geraden Linie e a; et ergo ist auch e a größer, als e b; siehe den funfzehnten Lehrsatz Fig. 21. Welches das erste war. f c = f b, f e = f e, der Bogen a c ist größer, als der Bogen a b; ergo ist auch e c kleiner oder kürzer, als die gerade Linie e b; siehe hiervon den vorhergehenden Lehrsatz Fig. 21. f e = f e, f c = f d, der Bogen a b d ist größer, als der Bogen a c; ergo ist auch e d kleiner oder kürzer, als e c. Welches das zweyte war. Tab. IV. Fig. 22.

ae = ae, = der geraden Linie, ergo ag = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln, = dem halben Zirkel, weil auf jedweder geraden Linie ein halber Zirkel beschrieben werden kann. Siehe hiervon den ersten Band Regul. Geometr. 58. Welches das dritte war.

fa = fb, ef = fe, ea = ef + fb, ergo ist der Winkel l oder bfe kleiner, als die gerade Linie afe, et ergo ist auch ea größer als eb. Welches das vierte war.

ea = ea, fa = fc, ef + fc = ea. Der Winkel l oder efb ist größer, als der Winkel m, oder sein gleicher efc; ergo ist auch die gerade Linie eb größer, als die gerade Linie ec. Welches das fünfte war.

ea = fd + fe, der Winkel n oder sein gleicher dfe ist kleiner, als der Winkel m, oder sein gleicher efc; ergo ist auch die gerade Linie ed kürzer, als die gerade Linie ec. Welches das sechste und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Folglich je näher die geraden Linien eb, ec, ed der geraden Linie ea, so durchs Centrum f gehet, kommen, desto länger sind sie auch.

Zweyter Zusatz.

Folglich ist die gerade Linie ed die kürzeste gegen die andern drey Linien ec, eb und ea, weil sie

sie am weitesten mit ihrem Endpunkte d von dem in der Peripherie stehenden Punkt a entfernet ist; denn der Bogen abd ist größer, als der Bogen ac, und der Bogen ac ist größer, als der Bogen ab.

Dritter Zusatz.

Derohalben können aus einem außerhalb eines Zirkels abdkighc willkührlich angenommenen Punkte e nicht mehr, als zwey gleichlange gerade Linien, in den hohlen oder concaven Theil dieses Zirkels gezogen werden.

Vierter Zusatz.

Derohalben können auch nicht mehr, als zwey gleichlange gerade Linien, aus dem Punkt e auf den ausgebogenen Theil oder Convexität kigh des Zirkels achgikdb gezogen werden.

Fünfter Zusatz.

Unter den geraden Linien ek, eh, ei, eg ist die kürzeste die gerade Linie eg, weil selbige mit dem Diameter ga in directione recta oder schnurgerader Richtung durch das Centrum f durchgehet.

Sechster Zusatz.

Je größer demnach die Bogen gk, gh, gi des convexen Theils kigh des Zirkels achgik

db sind, desto långer sind auch derselben Linien ke, ie, ge, he, so von e aus die in der Peripherie dieses Zirkels stehenden Punkte k, h, i, g berühren.

Siebenzehnter Lehrsatz.

Wenn in einem Zirkel aegcfbh ein ungefähRer Punkt d eingesetzt wird, und von selbigem Punkt d mehr denn zwey gleichlange gerade Linien dc, db, da in gedachtem Zirkel bis an dessen Circumferenz oder Umkreis gezogen werden können, so liegt dieser Punkt d just in dem Centro des Zirkels ahbfceg.

1. Mechanischer Beweis.

Tab. IV. Fig. 23. Wollte man mehr, als zwey gleichlange gerade Linien, aus einem auf dem Diameter gh willkührlich angenommenen Punkte m in die Peripherie des Zirkels ziehen, wie etwan die geraden Linien ma, mb, mc, so ist dieses nicht möglich, sondern augenscheinlich klar und sichtbar, daß die gerade Linie mc größer, als mb oder ma ist. Weil der Punkt m nicht in dem Centro d liegt, so können auch nicht alle Punkte, so in dem Bogenstück ahbfc des Zirkels aegc fbh befindlich, von diesem neu angenommenen Punkte m gleich weit abstehen. Denn es sind nur alle in der Peripherie eines Zirkels möglich anzunehmende Punkte vom Centro d gleich weit entfernet; siehe hiervon den ersten Band Regul.

gul. Geometr. 65. Um nun dieses mechanisch zu beweisen, daß man nur zwey gleichlange gerade Linien ma und mb aus einem in einem Zirkel willkührlich angenommenen und nicht in dem Centro d liegenden Punkte m ziehen könne; so ziehet eine gerade Linie mh, traget aus h zu beyden Seiten nach a und b eine egale Distanz, und ziehet die geraden Linien ma und mb, welche gleich groß seyn werden. Da nun mh die kürzeste gerade Linie gegen die beyden andern ma und mb, welche gleich groß sind, ist: so ist natürlicher Weise zu schließen, daß auch die Punkte a und b weiter, als der Punkt h, von m entfernet seyn müsse.

Nun ist also völlig klar, daß sich das übrige Bogenstück bfc dieses Zirkels vom Punkte m noch weiter entfernet, also muß auch die gerade Linie mc länger, als ma oder mb, seyn. Welches zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Der Bogen fc ist = dem Bogen fb; cb = cb; fd = fd; perpendikulär auf cb; ergo ist der Winkel k = dem Winkel l = 90 Grad, et ergo ist dc = db. Welches das erste war. Der Bogen ha ist = dem Bogen hb; und der Radius hd ist sich selbsten gleich, und stehet auf der Chorde ab des Bogens ahb, in directione perpendiculari, dh = df; ib = ia; ergo bd = ad; denn Tab. IV. Fig. 23.

denn es sind Radii eines Zirkels, et ergo ad = dc. Welches das zweyte war.

de = df, dg = dh, und der Bogen eg ist = dem Bogen fbh; ergo ist der Bogen cg + dem Bogen cf, = dem Bogen ea, + dem Bogen ah, et ergo ist auch de = dg, = dc, = df, = db, = dh, = da; denn alle Radii eines Zirkels sind einander gleich. Also sind auch die drey aus dem ungefähr angenommenen Punkte d gezogenen geraden Linien da, db, dc einander gleich. Welches das dritte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Derohalben können in einem Zirkel nicht zwey Centra seyn.

Zweyter Zusatz.

Also kann man auch nur aus diesem einen Centro bis an die Peripherie so viel gleichlange gerade Linien ziehen, als man will.

Dritter Zusatz.

Man setze demnach so viel ungefähre Punkte in einem Zirkel um dessen Centrum herum, als man wolle, so kann man nur aus jedem dieser Punkte zwey gleichlange gerade Linien in die Peripherie dieses Zirkels ziehen.

Acht-

Achtzehnter Lehrsatz.

Ein Zirkel a b c d durchschneidet einen andern a e c f nur in zweyen Punkten a und c.

1. Mechanischer Beweis.

Dieses ist sehr leicht zu beweisen; denn man ziehe zwey Zirkel mit einerley Radio, oder den einen mit einem kleinen, und den andern mit einem großen Radio, dergestalt, daß die Zirkelperipherien nicht nur einander küssen, sondern sich gar durchschneiden, so wird dieses allezeit nur in zweyen Punkten geschehen können, und zwar aus dem Grunde, weil eine Zirkellinie nur aus einem Centro beschrieben werden kann, und auch nur aus einem Diameter bestehet, welcher doppelt so groß, als der Radius, womit der Zirkel beschrieben worden ist. Tab. V. Fig. 24.

2. Mathematischer Beweis.

Der Radius ga ist = dem Radio gf, = dem Radio gc, = dem Radio ge, = Radiis Circuli afce. Radius ha = Radio hb, = Radio hc, = Radio hd, = den Radiis des Zirkels abcd. gd ist kleiner als gf, und hf ist größer als gf. he ist kleiner als hb, und gb ist größer als he; ergo ist g das Centrum des Zirkels afce; und h das Centrum des Zirkels adcb. Welches das erste war. Derohalben also, weil diese zwey Zirkel abcd und aecf aus zwey verschiedenen Cen- Tab. V. Fig. 24.

tris g und h gezogen worden, so schneiden sie sich auch in zweyen Punkten a und c. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Zusatz.

Tab. V. Fig. 25.

Derohalben können sich zwey gleich große, oder ein großer und ein kleiner, aus einem Centro gezogene Zirkel gar nicht durchschneiden, siehe hiervon den dreyzehnten Lehrsatz Fig. 19.; denn es würde nach dem ersten Falle, wenn nämlich die Zirkel von gleicher Größe wären, einer den andern decken, oder, nach dem andern Falle, wenn nämlich zu dem einen Zirkel ein großer, und zu dem andern ein kleiner Radius genommen würde, ein Zirkel mit dem andern parallel laufen. Derohalben müssen zwey sich einander durchschneidende Zirkel auch zwey verschiedene Centra haben. Sollen sich aber ja zwey krummlinigte Flächen schneiden, so muß das eine eine Zirkellinie a h g f e d c b, und das andre eine Linsenlinie oder Elipsis a k c l e m g n seyn.

Beweis.

Tab. V. Fig. 25.

Da i a = i g, = i e, = i c, so sind selbige auch die Radii des Zirkels a b c d e f g h, welcher aus dem Centro i gezogen worden, und derohalben sind auch diese Radii alle einander gleich. Welches das erste war.

Wenn man nun vermuthet, daß ein Zirkel den andern in verschiedenen Punkten, als in a,

c, e, g, durchschneiden sollte, so müßte sich der Radius ia in seinem Umlaufe bald verlängern, wie in oder il, bald aber wieder verkürzen, wie ik oder im, durch welche Verlängerung und Verkürzung diese Figur aber aus einem Zirkel abcdefgh in ein Oval oder Linsenlinie akcle mg verwandelt werden würde. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Neunzehnter Lehrsatz.

Wenn zwey gleich große Zirkel abcd und cdef sich in c und d durchschneiden, so theilen die gemeinschaftlichen semidiametri gh, so durch derselben Peripherien in i und k gezogen worden, die gerade Linie cd in l winkelrecht und in zwey gleiche Theile. Gleichwie auch die aus den Durchschnittspunkten c, d gezogene gerade Linie dlc, die von einem Centro g bis zum andern Centro h gezogene gerade Linie gh, in l winkelrecht und in zwey gleiche Theile theilet.

1. Mechanischer Beweis.

Man ziehe z. E. aus zwey willkührlich angenommenen Punkten g und h zwey gleich große Zirkel, jedoch aber mit einer etwas kleinern Spannung zum Radio, als die Entfernung dieser zweyen Punkte g und h ist, diese zwey gleich große Zirkel abcd und cdef werden und müssen sich in c und e schneiden. Nun ziehet cd sowohl Tab. V. Fig. 26.

 als

tris g und h gezogen worden, so schneiden sie sich auch in zweyen Punkten a und c. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Zusatz.

Tab. V. Fig. 25. Derohalben können sich zwey gleich große, oder ein großer und ein kleiner, aus einem Centro gezogene Zirkel gar nicht durchschneiden, siehe hiervon den dreyzehnten Lehrsatz Fig. 19.; denn es würde nach dem ersten Falle, wenn nämlich die Zirkel von gleicher Größe wären, einer den andern decken, oder, nach dem andern Falle, wenn nämlich zu dem einen Zirkel ein großer, und zu dem andern ein kleiner Radius genommen würde, ein Zirkel mit dem andern parallel laufen. Derohalben müssen zwey sich einander durchschneidende Zirkel auch zwey verschiedene Centra haben. Sollen sich aber ja zwey krummlinigte Flächen schneiden, so muß das eine eine Zirkellinie a h g f e d c b, und das andre eine Linsenlinie oder Elipsis a k c l e m g n seyn.

Beweis.

Tab. V. Fig. 25. Da i a = i g, = i e, = i c, so sind selbige auch die Radii des Zirkels a b c d e f g h, welcher aus dem Centro i gezogen worden, und derohalben sind auch diese Radii alle einander gleich. Welches das erste war.

Wenn man nun vermuthet, daß ein Zirkel den andern in verschiedenen Punkten, als in a,

c, e, g,

c, e, g, durchschneiden sollte, so müßte sich der Radius ia in seinem Umlaufe bald verlängern, wie in oder il, bald aber wieder verkürzen, wie ik oder im, durch welche Verlängerung und Verkürzung diese Figur aber aus einem Zirkel abcdefgh in ein Oval oder Linsenlinie akcle mg verwandelt werden würde. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Neunzehnter Lehrsatz.

Wenn zwey gleich große Zirkel abcd und cdef sich in c und d durchschneiden, so theilen die gemeinschaftlichen semidiametri gh, so durch derselben Peripherien in i und k gezogen worden, die gerade Linie cd in l winkelrecht und in zwey gleiche Theile. Gleichwie auch die aus den Durchschnittspunkten c, d gezogene gerade Linie dlc, die von einem Centro g bis zum andern Centro h gezogene gerade Linie gh, in l winkelrecht und in zwey gleiche Theile theilet.

1. Mechanischer Beweis.

Man ziehe z. E. aus zwey willkührlich angenommenen Punkten g und h zwey gleich große Zirkel, jedoch aber mit einer etwas kleinern Spannung zum Radio, als die Entfernung dieser zweyen Punkte g und h ist, diese zwey gleich große Zirkel abcd und cdef werden und müssen sich in c und e schneiden. Nun ziehet cd sowohl Tab. V. Fig. 26.

 als

als gh durch gerade Linien gh und dc zusammen, diese zwey geraden Linien hg und dc schneiden sich in l nicht allein winkelrecht, sondern auch accurat in ihrer beyderseitigen Mitte. Um dieses zu beweisen, ob sie sich recht winkelrecht nach dem Quadranten in l schneiden, so ziehet aus den Centris g und h nach den Durchschnittspunkten c und e blinde Linien gc, gd, hd, hc, messet selbige mit dem Zirkel, und wenn gc = ch, ch = hd, hd = dg, und dg = gc, so durchschneiden sich diese zwey geraden Linien cd und gh in l winkelrecht. Welches das erste war.

Nun sollen sie sich auch in ihrem Durchschnittspunkt l beyderseits in zwey gleiche Theile theilen: derohalben messet gl, so werdet ihr finden, daß sie mit lh gleichlang ist; messet ferner auch cl, so wird diese Distanz gleichfalls mit ld von egaler Länge seyn, ergo sind die geraden Linien gl = lh und dl = ld. Welches das zweyte war.

gl = lh, lc = ld, gc = ch, und cl = cl, denn jede Größe ist sich selbsten gleich; ergo stehet cl auf gh in directione perpendiculari, et ergo angulus m = 90 Grad = dem rechten Winkel, angulus gmd = angulo clh = 90 Grad = dem rechten Winkel, ergo angulus clg = angulo hld = 90 Grad = dem rechten Winkel, et ergo angulus clh = 90 Grad = dem rechten Winkel, ergo durchschneiden sich die beyden geraden Linien cd und gh in l winkelrecht und in ihrer beyder-

seitigen

seitigen Mitte. Welches das dritte und zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Die gerade Linie cd = cd, siehe den ersten Theil Regul. Arithm. 1., denn jede Größe ist sich selsten gleich, gc = ch, dh = dg, gd = gc; ergo dh = ch, et ergo triangulum gch = et ∽ triangulo gdh. Welches das erste war. Tab. V. Fig. 26.

cd = cd perpendiculari; ergo angulus l = angulo m, = 90 Grad, = angulo recto, et ergo lg = lh. Welches das zweyte war.

gh = gh, angulus m = angulo l, angulus m = 90 Grad, = dem rechten Winkel, ergo lc = ld. Welches das dritte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also kann man ganz leicht auf der Mitte l einer gegebenen geraden Linie gh einen Perpendikel lc errichten, oder ld aus l fällen.

Zweyter Zusatz.

So läßt sich auch ganz leicht eine jedwede gegebene gerade Linie in zwey, vier, acht, sechzehn u. s. w. gleiche Theile theilen.

Dritter Zusatz.

Auf diese Art kann man auch auf jedweder gegebenen geraden Linie sowohl einen gleichseitigen, als auch einen gleichschenklichten Triangel errichten.

Zwanzigster Lehrsatz.

Tab. V. Fig. 27. Wenn sich zwey excentrische Zirkel a b c d und e f c g im Punkt c von innen berühren, so gehet die durch beyde Centra h und i gezogene gerade Linie c a mitten durch beyde Zirkel a b c d und e f c g, und endiget sich in derselben beyderseitigen Berührungspunkte c.

Beweis.

Der Radius i e ist = dem Radio i c, denn alle Radii eines Zirkels sind einander gleich; s. hiervon den ersten Band Regul. Geometr. 59. Wenn man aber auch die gebrochne Linie m k a vor eine gerade Linie annehmen wollte, so ist dieses nicht möglich, denn a k + k m ist größer, als a c; ergo ist: erstens die gerade Linie k m um den Theil l m größer als k c, welches aber nicht seyn sollte; zweytens soll sich die gerade Linie a c, oder, welches gleich viel ist, der Diameter a c des Zirkels a b c d, laut unserm Lehrsatze, nicht brechen, wie sich a c in k gebrochen. Wenn sich also die gerade Linie nicht bricht, sondern der Diameter a c in directione recta durch beyde Centra h, i durchgehet, so wird

und muß selbige allezeit in dem Berührungspunkt c eintreffen. Welches zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also kann man, vermöge eines Halbmessers oder Durchmessers, ganz leicht sich von innen berührende Zirkel ziehen.

Zweyter Zusatz.

Aus eben diesem Grunde kann man, vermittelst eines Durchmessers oder Halbmessers, den Berührungspunkt zweyer sich von innen berührender Zirkel finden.

Ein und zwanzigster Lehrsatz.

Wenn sich zwey Zirkel abc und cde von außen in c berühren oder küssen, so gehen derselben beyderseitige zusammengezogene Radii cf und cg durch den Berührungspunkt c.

Beweis.

Der Radius cf ist = dem Radio cg, und der Radius cf ist = der geraden Linie ch per constructionem. Der Radius cg ist = der geraden Linie ci per constructionem; denn der Berührungspunkt c ist als ein Centrum angenommen worden, aus welchem man die Bogen fh und gi gezogen. Der Winkel ich ist kleiner, als die Tab. VI. Fig. 28.

 gerade

gerade Linie fg. hc = ic; ergo hi minor fg. Welches das erste war.

Da nun die gerade Linie hi nicht aus den Centris gezogen worden ist, welches doch seyn sollte, zweytens auch kürzer ist, als die beyden Radii cf und cg, drittens auch noch das zwischen beyden Zirkeln befindliche kleine Theilchen kl davon abgehet, so ist klar, daß keine andere, als die aus den Cenrtis f und g gezogene gerade Linie fg, durch den Berührungspunkt c gehen könne. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Zwey und zwanzigster Lehrsatz.

Zwey Zirkel abc und cde können einander nur von außen in einem einzigen Punkte c berühren oder küssen.

Beweis.

Tab. VI. Fig. 29. Man ziehe derselben beyde Radii gc und fc aus den Centris f und g durch eine gerade Linie fg zusammen, so wird solche durch den Berührungspunkt c gehen; siehe hiervon vorhergehenden ein und zwanzigsten Lehrsatz Fig. 28. Wollte man aber die Centra f und g durch die gerade Linie fh und gh zusammenziehen, so ist erstens fh + gh größer als fg, und zweytens treffen die Zirkel abc und cde auch nicht im Punkt h aneinander; folglich berühren sie sich

sich nur in einem einzigen Punkte c. Welches zu beweisen war.

Zusatz.

Auch ist diese Berührung nur in einem einzigen Punkte c von zweyen sich einander von innen berührenden Zirkeln a b c d und e f c g möglich.

Beweis.

Der Radius k e ist = dem Radio k c, und der Radius h a ist = dem Radio h c; denn alle Radii eines Zirkels sind einander gleich und ähnlich. Wollte man nun aus beyden Centris h und k von der geraden Linie a c abweichen, und die Radii h c und k c nach i, wie h i und k i, ziehen, so berühren sich diese Zirkel wiederum in selbigem Punkte i nicht, sondern weichen mehr und mehr auseinander. Denn so wie sich diese beyden Zirkel a d c b und e g c f in c berühren, folglich auch in diesem Berührungspunkte c am nächsten beysammenstehen, so sind sie in i und l schon in etwas, in f und b mehr, und in a und e am weitesten von einander entfernt: ergo ist nur ein einziger Berührungspunkt c bey zweyen sich von innen oder von aussen berührenden Zirkeln a d c b und e g c f möglich. Tab. VI. Fig. 30.

Anmer-

Anmerkung.

Diese zwey letztern Lehrsätze sub Fig. 29 et 30 dienen besonders den Astronomen bey der Ausrechnung des Laufes der Planeten, und die sich von außen berührenden Zirkel werden gleichfalls in der Mechanik öfters gebraucht, im übrigen sind sie in der praktischen Geometrie auf dem Felde von keinem besondern Nutzen.

Drey und zwanzigster Lehrsatz.

In einem Zirkel a b d c stehen die gleichlangen geraden Linien a b und c d vom Centro e in gleicher Entfernung e f und e g gleich weit ab.

1. Mechanischer Beweis.

Tab. VI. Fig. 31.

Gesetzt, man habe zwey gleichlange parallellaufende gerade Linien a b und c d, so theilet selbige in f und g in zwey gleich Theile; theilet wiederum die gerade Linie f g in e in zwey gleiche Theile, so werdet ihr finden, daß f g ein Theil des Diameters ist, und daß der Punkt e in dem Centro des Zirkels a c d b liege. Da nun e f = e g per constructionem, so ist auch die gerade Linie a b so weit, als die gerade Linie c d, vom Centro e entfernt. Welches zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Tab. VI. Fig. 32.

Da f g auf den Chorden a b und c d des Zirkels a b c d perpendikulär aufstehet, so theilet sie

solche,

solche, indem sie durchs Centrum e gehet, in zwey gleiche Theile. Derohalben ist af = fb, und gc = gd; ea = ec, und af = cg. Welches das erste war.

Angulus h = angulo i, et angulus k = angulo l, angulus k = 90 Grad, = dem rechten Winkel, ergo angulus l = 90 Grad, = dem rechten Winkel; fb = fa, gd = gc, ergo ab = dc. Welches das zweyte war.

fg = fg = angulus k = angulo m, angulus l = angulo n, fa = gc, ea = ec; ergo triangulum fae = et ∽ triangulo ecg. Welches das dritte war.

Ergo ae = ce, et fe = ge. Welches das vierte und zu beweisen war.

Zusatz.

Also sind auch alle gerade Linien ab und cd, so vom Centro e eines Zirkels acdb gleichweit in f und g entfernt sind, einander gleich.

Vier und zwanzigster Lehrsatz.

Wenn an dem einen Endpunkte a eines Diameters ab eine gerade Linie cad dergestalt gezogen wird, daß ba auf cd perpendikulär aufstehet, so fällt diese gerade Linie cd ganz außer dem Zirkel aebf des Diameters ab.

Beweis.

Beweis.

Tab. VII. Fig. 32. Weil die Hypothenuse g h dem rechten Winkel bey a gegen über liegt, so ist h a + a g grösser, als g h. g k ist = g a. Wollte man nun die Perpendikulärlinie c d, statt aus a gegen h, nach k ziehen, so würde die Linie i a auf a b keine Perpendikulärlinie mehr seyn, sondern bey a einen spitzigen Winkel i a g formiren. Welches das erste war.

Tab. VII. Fig. 33. Ziehet man aber zwischen der Zirkellinie a c b d und der Perpendikulärlinie a b nach dem Punkt a noch eine andere gerade Linie g a, so wird der Winkel i, welcher von der geraden Linie g a und dem Diameter b a des Zirkels a c b d formiret worden, dennoch ein spitziger Winkel seyn, ohngeachtet der Berührungspunkt a auf seiner Stelle geblieben; derohalben kann man auf das Ende a eines Diameters b a nicht mehr als eine Perpendikulärlinie f a oder e a in e errichten. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Wenn also aus dem Ende eines Diameters eine Perpendikulärlinie errichtet wird, so berühret selbige den Zirkel nur in einem einzigen Punkte.

Zweyter Zusatz.

Eine gerade Linie also, die einen Zirkel in zweyen Punkten berühret, liegt ganz und

gar

gar im Zirkel, siehe den neunten Lehrsatz Fig. 15.

Fünf und zwanzigster Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie a b einen Zirkel c d e in e berühret, so stehet der Radius f e, welcher aus dem Centro f nach dem Berührungspunkte e gezogen worden ist, perpendikulär auf dieser berührenden Linie a b.

Beweis.

Da aus einem gegebenen Punkte f auf eine gerade Linie a b nur eine Perpendikulärlinie f e gezogen werden kann, siehe den dritten Lehrsatz Fig. 4., so ist hierdurch dieses Theorema schon sattsam bewiesen, denn der Winkel f e g ist = 90 Grad = dem rechten Winkel. Nun ist e der Berührungspunkt der Tangente a b, ergo berühret auch der Radius f e des Zirkels c d e diese Tangente a b in e winkelrecht. Welches das erste war. Tab. VII. Fig. 34.

Wollte man aber aus dem Centro f noch eine andre berührende Linie f g nach der Tangente a b führen, so würde solche erstens nicht auf den Berührungspunkt in e fallen, und zweytens auch um das Stück h g länger, als der verlangte Radius f h, seyn, und drittens könnte man aus f zwischen g e noch unzählig viele gerade Linien ziehen, deren keine aber auf a b, wie f e, perpendikulär

dikulär aufstehen würde; folglich stehet der aus dem Centro f nach dem Berührungspunkte e gezogene Radius fe ganz allein auf der Tangente ab perpendikulär, und ist keine andere senkrechte gerade Linie aus dem Centro f auf die Tangente ab zu ziehen möglich. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Zusatz.

Ergo kann auch eine jedwede gegebene gerade Linie einen Zirkelkreis in einem gewissen Punkte, und, umgewandt, ein Zirkelkreis wiederum eine gerade Linie in einem gegebenen Punkte berühren.

Sechs und zwanzigster Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie ab einen Zirkel cefd in c berühret, und man aus diesem Berührungspunkte c eine Perpendikulärlinie cf in den Zirkel cefd errichtet, so wird diese Perpendikulärlinie cf durchs Centrum g gehen, und zugleich ein Diameter dieses Zirkels cdfe seyn.

Beweis.

Tab. VII. Fig. 35. Der Diameter cf ist sich selbsten gleich. Da nun g das Centrum des Zirkels cdfe ist; ergo ist auch gc = gf. Welches das erste war.

Angulus gcb = dem rechten Winkel, = 90 Grad; denn cf gehet aus dem Berührungspunkte

te c der Tangente ab durchs Centrum g; ergo stehet auch fc auf ab perpendikulär oder winkelrecht; derohalben ist der Winkel gca auch ein rechter Winkel, und = dem Winkel gcb; siehe den ersten Band Regul. Geometr. 20. et ergo stehet fc auf ab winkelrecht; siehe Regul. Geom. citat. Welches das zweyte war.

Angulus fcb + angulo hcb, = 90 Grad = dem rechten Winkel, ergo ist der Winkel hcb kleiner als der Winkel fca, kleiner als 90 Grad; kleiner als der rechte Winkel. Welches das dritte war.

Der Bogen cdf ist = dem Bogen cef = dem halben Zirkel: denn jede gerade Linie cf, so in einem Zirkel cefd gezogen wird, und durchs Centrum g gehet, ist ein Diameter, und alle Durchmesser theilen ihren Zirkel, und folglich auch den Bogen, in zwey gleiche Theile; siehe den ersten Theil Regul. Geometr. 62. Der Bogen cdfh ist größer, als der halbe Zirkel ceh. Ergo ist auch der Bogen cdfh größer, als der halbe Zirkel cdf, und der Bogen ceh ist kleiner, als der halbe Zirkel cef; ergo stehet cf auf ab senkrecht. Welches das vierte und zu beweisen war. Tab. VII. Fig. 36.

Zweyter Abschnitt.

Von den Parallellinien.

Sieben und zwanzigster Lehrsatz.

Alle zwischen zwey Parallellinien a b und c d liegende Perpendikularen e f und g h sind einander gleich.

Tab. VII. Fig. 35.

1. Mechanischer Beweis.

Gesetzt, es wollte jemand eine Leiter oder auch eine Raufe in einem Pferdestalle verfertigen, so wird einem jeden, er sey wer er wolle, bekannt seyn, daß sowohl die beyden Stangen einer Leiter, als auch einer Raufe, auf beyden Seiten von einander gleich weit entfernt seyn müssen, und folglich schließet der Verfertiger derselben, daß, wenn die Stangen eine gleiche Weite von einander behalten sollen, die Queerhölzer sodann auch von egaler Länge seyn müssen; ohngeachtet der Zimmermann, oder der Bauer, welcher diese Leiter oder Raufe verfertiget, nicht weiß, daß dieses der wahre Grund zu den mathematischen Parallellinien ist, noch viel weniger aber, daß es Parallellinien, und also geometri-

sche Figuren, sind. Um nun diese Raufe oder Leiter also einzurichten, daß die Stangen auf beyden Seiten gleiche Weite von einander behalten, so wird er, nach seinem gemachten Schlusse, die Sprossen, so zur Leiter und Raufe unumgänglich gehörig und nöthig, von gleicher Länge machen, und also einrichten, daß sie nicht schief oder schräge, sondern fein gerade in die beyden Stangen eingesetzt werden, ohngeachtet sich der Verfertiger dieser beyden häuslichen Instrumente oder Geräthschaften nicht darum bekümmert, daß diese Sprossen zwischen beyden Stangen die in den geometrischen Parallellinien liegenden Perpendikularen vorstellen.

2. Mathematischer Beweis.

Der Winkel i ist = dem Winkel k, und der Winkel k ist = dem Winkel m; der Winkel i ist = dem Winkel l; und der Winkel k = dem Winkel m; folglich ein jeder = 90 Grad, = dem rechten Winkel; ergo stehen ef und gh auf ab und cd perpendikulär; et ergo ist efgh ein Quadrangulum rectangulum, und derohalben gehet cd mit ab parallel. Siehe den ersten Band Regul. Geometr. 17. Welches zu beweisen war. Tab. VII. Fig. 37.

Erster Zusatz.

Derohalben kann man durch Hülfe der Perpendikulärlinien ef und gh leichte Parallellinien ab und cd construiren.

Zweyter Zusatz.

Tab. VIII. Fig. 38. Daher ist auch das Parallelogrammum rectangulum abef, der Rhomboides fghc, und die beyden Triangula rectangula gef und hdc von gleicher Höhe, weil sie zwischen zweyen gleich langen senkrechten geraden Linien ab und cd, und folglich auch zwischen zwey gleichlaufenden geraden Linien ac und bd, liegen.

Dritter Zusatz.

Tab. VIII. Fig. 39. Folglich sind auch die Triangula scalena, age, afe, ehc, eic, abg, gfe, fhe und cid von gleicher Höhe ab oder cd, weil sie zwischen zweyen Parallelen ac und b dliegen.

Acht und zwanzigster Lehrsatz.

Wenn man eine gerade Linie ae in b, c, d in beliebige gleiche Theile theilet, und an eine andere, willkührlich angenommene gerade Linie fg, aus den Punkten a, b, c, d, e die Parallelen af, bh, ci, dk, eg ziehet; so wird auch diese gerade Linie fg in so viel gleiche Theile, wie ae, getheilet werden.

1. Mechanischer Beweis.

Man nehme z. E. das Sparrwerk eines Daches an, allwo die Sparren ae an der einen Ecke des Hauses mit einem sehr spitzigen Winkel aeg auf

auf der Mauerlatte oder Gesimse eg aufliegen; da hingegen, wegen eines Nebengebäudes, das Dach auf der andern Seite von fg, unter einem etwas größern Winkel fge, auf der obern Kante der Mauer aufstehet. Wenn nun die Zimmerleute das Dach belatten wollen, damit es eingedeckt werden könne, so nageln sie die Latten, welche allhier die geraden Linien bh, ci, dk, eg, parallel mit dem Fürsten oder Hanebalken, für welchen wir die gerade Linie af ansehen, auf die Sparren, diese Latten bh, ci, dk, eg werden die gerade Linie ae oder Sparren in gewisse gleiche Theile theilen, von eben diesen Latten aber wird das Dach auf der andern Seite von fg in eben so viele gleiche Theile getheilet werden, und kommen also sowohl auf ae, als fe, eine gleiche Reihe Dachziegel. Welches mechanisch zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

af=bl, et ab=fl, bh=cm, et bc=hm. Tab. VIII. Fig. 40. Da nun diese einander gegenüberstehenden Linien an Länge einander gleich sind, so sind auch af, bl und bh, cm reguläre Parallelogramma oder Rhomboides. Siehe den ersten Band, 126. Erklärung, Fig. 121. Welches das erste war.

Da aber die geraden Linien bh und cm der Linie af parallel sind, ingleichen die Linien fl und

hm den Linien ab und cd, siehe den ersten Band, 126. Erklärung cit.; so ist auch der Winkel o = dem Winkel n; und der Winkel q = dem Winkel p; ergo fh = hi, und also auch die zwey restirenden Theile ik und kg auf der geraden Linie fg gleich den zwey restirenden Theilen cd und de auf der geraden Linie ae. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Wenn auch die gerade Linie ae in gewisse proportionirliche Theile getheilet wäre, so würden gleichfalls die durch die auf der geraden Linie ae aus den ungleichen Theilungspunkten gezogenen Parallellinien die gerade Linie fg in so viele und dergleichen proportionirte Theile theilen.

Zweyter Zusatz.

Wären aber die von den geraden Linien ae und fg auf der Basis eg aufgesetzten Winkel r und s einander gleich, so würden die Theile auf fg durch die Parallellinien den Theilen auf ae gleich seyn.

Dritter Zusatz.

Tab. VIII. Fig. 41.

Es sey also auf bf gegeben die schräge Linie ba aus b, und die schräge Linie fe aus f; Nun ist ab in gewisse proportionirte Theile getheilet worden; ziehet sodann die gerade Linie ae und

mit

mit ihr die Parallelen cg, dh, bf, traget ae auf cg aus c nach i; traget cg auf dh aus d nach k; ziehet ei und gk, so werden nicht allein ei mit ac, und gk mit cd, sondern auch ie mit kg, parallel seyn. Ergo ist auch der Winkel x = dem Winkel y, und der Winkel w = dem Winkel z. Siehe hiervon den ersten Band Regul. Geometr. 23. Derohalben stehet eg mit ac, und gh mit cd in Proportion. Ergo verhält sich auch eg zu gh, wie ac zu cd; und wie sich verhält hg zu hf, also verhält sich auch cd zu db. Welches zu beweisen war.

Neun und zwanzigster Lehrsatz.

Ein jedes Quadratum, Oblongum, Rhombus und Rhomboides abdc wird von seiner Diagonallinie ab in zwey gleiche Theile getheilet; die beyden einander entgegengesetzten Winkel e und f, wie auch die Winkel i + g, und k + h, sind einander gleich, und die einander entgegengesetzten Seiten ac, bd, und ab, cd gehen mit einander parallel.

1. Mechanischer Beweis.

Man fälle aus d auf die Diagonale ac, wie auch aus b auf eben dieselbe, die beyden Perpendikularen dl und bm, so wird man finden, daß, wenn man selbige mit dem Zirkel misset, sie von egaler Länge seyn; woraus also erstens zu schließen, daß

der Triangel abc so hoch, wie der Triangel cb a. Ferner messet cd, diese wird gleichfalls mit ab von gleicher Länge seyn, messet auch ad, so werdet ihr finden, wenn ihr diese Länge auf cb traget, daß selbige einander gleich sind. Nun messet die Spannung des Winkels i gegen die Spannung des Winkels k, die Spannung des Winkels h gegen die vom Winkel g, und messet auch letztens die Spannung des Winkel e gegen die Spannung des Winkels f, so wird i gleich seyn k; g gleich mit h; und e gleich mit f. Da also erstens die Seite ad und dc mit cb, mit ba, nachdem man sie gemessen, eine Länge haben, und die gleichnamigen Winkel einander gleich sind, so müssen natürlicher Weise beyde Triangel adc und cba durch die Diagonale ac also getheilet worden seyn.

2. Mathematischer Beweis.

Tab. IX. Fig. 42. ab = cd; ac = ac; ad = cb; ergo triangulum adc = et ∽ triangulo abc. Welches das erste war.

Angulus e = angulo f, angulus g = angulo h, angulus i = angulo k, ergo angulus i + g = angulo k + h, ergo gehet ab mit cd, und ad mit bc parallel. Welches das zweyte war.

ac = ac; angulus g = angulo h; ad = cb; angulus i = angulo k; ergo ba = dc; et ergo triangulum cba = et simile triangulo adc. Welches das dritte war.

Da

Da nun beyde Triangel einander gleich sind, so theilet auch die Diagonale a c den Rhomboides a d c b in zwey gleiche Theile. Welches das vierte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also sind alle reguläre Quadrata, Parallelogramma, Rhombi und Rhomboides parallel.

Zweyter Zusatz.

Also ist auch jeder Triangel a b c und c d a, so gleiche Basis a c und gleiche Höhe m b und l d haben, einander gleich.

Dritter Zusatz.

Also ist ein jeder Triangel die Hälfte seines Parallelogrammi, das mit ihm gleiche Basis und gleiche Höhe hat.

Vierter Zusatz.

Folglich kann man auch den Umfang eines Parallelogrammi aus einem Triangel und eines Triangels Perimeter aus dem Parallelogrammo finden.

Anmerkung.

Ist aber das Quadrangulum ein Trapezium oder Trapezoides, so wird es zwar von der Diagonallinie in zwey, aber nicht gleich große Theile getheilet.

Dritter Abschnitt.

Von den Proportional- oder verhältnißmäßigen geraden Linien und ihrer Theilung.

Dreyßigster Lehrsatz.

Die Zirkelbogen ab und cd, welche zwischen zweyen Radiis ec und eb eines Winkels ced liegen, verhalten sich gegen einander nach ihrem Maaße oder Oeffnung, wie ihre Radii eb und ec.

Beweis.

Tab. IX. Fig. 43. Der Radius eb verhält sich zum Radio ed, wie 7 zu 12; ergo verhält sich auch der Diameter lb zum Diameter fd, wie 7 zu 12, oder wie 14 zu 24. Welches das erste war.

Der Bogen cd ist = $\frac{1}{4}$ des Bogens oder halben Zirkels fhcd, ergo ist auch der Bogen ab = $\frac{1}{4}$ des Bogens oder halben Zirkels lgab; et ergo verhält sich der Radius eb zum Bogen oder halben Zirkel lgab, wie der Radius ed zum Bogen oder halben Zirkel fhcd. Welches das zweyte war.

Der

Der Winkel aeb ist = dem Winkel ced; der Winkel aib ist = dem Winkel ckd, = dem rechten Winkel, = 90 Grad. ei verhält sich zu ea, wie ek zu ec; ergo verhält sich der Bogen ab zur Perpendikular ai, wie der Bogen cd zur Perpendikular ck; et ergo verhält sich auch die Perpendikular ai zur Perpendikular ck, wie der Bogen ab zum Bogen cd. Welches das dritte war.

li verhält sich zu ia, wie fk zu kc; ai verhält sich zu ib, wie ck zu kd; li verhält sich zu ia, wie ia zu ib; ergo verhält sich auch fk zu kc, wie kc zu kd; derohalben ist ia die mittlere Proportionallinie zwischen li und ib, so wie kc die mittlere Proportionallinie ist zwischen fk und kd. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also verhalten sich die Chorden ai und ck zu einander, wie ihre Halbmesser eb und ed zu einander. Weil die geraden Linien oder Perpendikularen ck und al die halben Chorden der halben Bogen cd und ab sind, so verhalten sich selbige auch wie ihre Diameter oder Durchmesser fd und eb.

Zweyter Zusatz.

Da nun jeder Zirkel in 360 Grade eingetheilet wird, und der Bogen cd = $\frac{1}{8}$ der ganzen

Periphe-

Peripherie des halben Zirkels fhcd, so muß der Bogen ab auch = $\frac{1}{8}$ der ganzen Circumferenz egab seyn; folglich ist es einerley, ob man einen Winkel mit einem großen oder kleinen Transporteur messe, so hat der Winkel dce, so wie der Winkel bea, doch allezeit einerley Maaß, dessen Latera ec oder ed mögen lang seyn, oder kurz, wie ae und eb.

Dritter Zusatz.

Also haben alle Zirkelbogen cd und ab, die aus der Spitze e eines Winkels ced gezogen worden, eine gleiche Anzahl Grade.

Vierter Zusatz.

Tab. IX. Fig. 44. Wenn man einen Triangel abd in einen Zirkel agbhdc beschreibet, so sind alsdenn die Seiten ab, bd, da des in diesem Zirkel beschriebenen Triangels abd als Chorden anzusehen, und also kann man schließen: wie sich verhalten die Seiten zu ihren Winkeln, also verhält sich auch die Seite ab zum Winkel c; und so verhält sich auch die Seite bd zum Winkel e; gleichwie sich verhält die Seite da zum Winkel f. Ferner wie sich verhält der Bogen agb zum Bogen bhd, so verhält sich auch der Winkel c zum Winkel e; und wie sich verhält der Bogen bhd zum Bogen dia, so verhält sich auch der Winkel e zum Winkel f. Item: wie sich verhält der Bogen dia zum Bogen agb, so verhält sich auch

auch der Winkel f zum Winkel c; und letztens, wie sich verhält die Chorde ab zum Bogen agb, also verhält sich auch die Chorde bd zum Bogen bhd; und wie sich verhält die Chorde bd zum Bogen bhd, also verhält sich auch die Chorde da zum Bogen dia. Und endlich, wie sich verhält die Chorde da zum Bogen dia, also verhält sich auch die Chorde ab zum Bogen agb.

Ein und dreyßigster Lehrsatz.

Wenn zwo Punkte a und b von zwey andern auf einer geraden Linie cd liegenden Punkten e und f zu beyden Seiten gleichweit entfernet sind, so ist die gerade Linie ab eine Perpendikulärlinie, welche just, wenn man sie verlängert, in die Mitte g, zwischen beyden auf der geraden Linie cd stehenden Punkten e und f, eintrifft.

1. Mechanischer Beweis.

Man betrachte z. E. ein Seeschiff, dessen Breite die Distanz e und f vorstellt, den Punkt b wollen wir vor den untersten, den Punkt a aber vor den obersten Mastkorb des Mastbaumes ag annehmen, die blinden Linien ae und af, welche beyde von einer Länge, und die blinden Linien be und bf, welche gleichfalls gleichlang sind, mögen, die ersten ae und af den Perdon vor der großen Stange, und die zweyten be und bf die Haupttouwe des großen Mastes, welches beydes große Schiffseile sind, vorstellen, diese haben, Tab. IX. Fig. 45.

als

als ae und af, eine gleiche Länge; be und bf sind auch einander gleich; und der Mastbaum ag fällt accurat perpendikulär in die Mitte g der Breite des Schiffes ef; folglich sind die Mastkörbe a und b von dem Borte des Schiffes e und f gleichweit entfernt.

2. Mathematischer Beweis.

Tab. IX. Fig. 45. ae = af, be = bf, ab = ab, angulus h = angulo i, angulus q = angulo r, ergo triangulum aeb = et ∽ triangulo abf. Welches das erste war.

be = bf, angulus k = angulo l, et ge = gf, ergo triangulum bge = triangulo bgf. Welches das zweyte war.

be = bf, angulus m = angulo n, angulus o = angulo p, bg = bg, ergo triangulum beg = et ∽ triangulo bfg. Welches das dritte war.

angulus k = 90 Grad dem rechten Winkel, angulus l = angulo k, ergo angulus l = 90 Grad = dem rechten Winkel; ergo eg = gf, et ergo stehet ag auf ef in directione perpendiculari. Welches das vierte und zu beweisen war.

Zusatz.

Durch diesen Lehrsatz kann man leicht, sowohl auf dem Felde als Papiere, Perpendikularen

laren errichten, wie auch eine jedwede gerade Linie in zwey gleiche Theile theilen.

Zwey und dreyßigster Lehrsatz.

Wenn man durch einen innerhalb eines Zirkels cdheibg angenommenen Punkt a zwey gerade Linien bd und ce bis an die Peripherie des Zirkels, wo sich dieselben in b, d und c, e berühren, ziehet, so verhält sich ab zu ae, wie ac zu ad, oder auch wie ab zu ae, also verhält sich auch ae zu ad.

Beweis.

Angulus k = angulo l, angulus m = angulo a, ergo triangulum abc ∽ triangulo aed. Welches das erste war. Tab. IX. Fig. 46.

Angulus f = angulo n, angulus f + angulo m = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln. angulus a + angulo n, = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln, ergo angulus m + angulo n, = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln, ergo verhält sich die gerade Linie oder Chorde bc zu ihrem Bogen bgc, wie die gerade Linie oder Chorde ed zu ihrem Bogen ehd. Welches das zweyte war.

Ergo verhält sich auch ab zu ae, wie ac zu ad; et ergo verhält sich auch ab zu ac wie ae zu ad. Welches das dritte und zu beweisen war.

Drey und dreyßigster Lehrsatz.

Tab. IX. Fig. 47. Wenn aus einem außerhalb eines Zirkels a i b g c k d h angenommenen Punkte e zwey gerade Linien e b und e c in die Peripherie des Zirkels nach den Punkten b und c gezogen werden, und also den Zirkel in a und d durchschneiden, und aus a nach c, und aus b nach d, gerade Linien ca und bd, so sich in f schneiden, gezogen werden; so verhält sich ed zu ea, wie eb zu ec. Desgleichen verhält sich auch dc zu ab, wie ae zu ed. Desgleichen verhält sich auch cf zu fb, wie df zu fa. Item: es verhält sich auch cf zu fd, wie bf zu fa; angulus 1 = 1, denn jede Größe ist sich selbsten gleich. Die Chorde dc verhält sich zum Bogen dkc, wie die Chorde ab zum Bogen aib. Die gerade Linie ec verhält sich zur geraden Linie eb, wie die gerade Linie ac zur geraden Linie db. Ergo verhält sich der Winkel afd zum Bogen ahd, wie der Winkel bfc zum Bogen bgc. Welches das erste war.

Der Winkel g verhält sich zum Bogen bgc, wie der Winkel m zum Bogen ahd. Der Winkel n ist = dem Winkel g, und der Winkel o ist = dem Winkel m; ergo verhält sich auch der Winkel n zum Bogen bgc, wie der Winkel o zum Bogen ahd; ergo ist der Triangel abf ∽ dem Triangel cfd. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Vier

Vier und dreyßigster Lehrsatz.

Wenn aber aus einem Punkt a, welcher außerhalb einem Zirkel cdb liegt, zwey gerade Linien ab und ac diesen Zirkel dergestalt berühren, daß ac den Zirkel cbd in c nur berühret, und ab durch den Zirkel cdb durchgehet, und selbigen in d schneidet, so bleibet nur eine Chorde db des Bogens dfb, die andre aber verlieret sich ganz und gar; denn die gerade Linie ac berühret nur den Zirkel in c, und kann also keine Chorde geben, und es ist alsdenn das Verhältniß dieser zwey geraden Linien ab und ac also, daß sich verhält ad zu ac, wie ac zu ab; folglich ist ac die mittlere Proportionallinie zwischen ad und db; das ist, wenn man aus db und da ein Parallelogrammum rectangulum errichtete, auf ac aber ein Quadratum perfectum construirte, so würde der Flächeninhalt des Rechteckes oder Parallelogrammi aus db und da gleich seyn dem Quadrat auf ac. Tab. X. Fig. 48.

Fünf und dreyßigster Lehrsatz.

Wenn man in einem Zirkel abcd einen Punkt e nach Willkühr annimmt, es sey wo es wolle, so kann man die geraden Linien bd und ac allezeit dergestalt ziehen, daß ac winkelrecht durch bd in e durchgehet, und bd zugleich in dem Durchschnittspunkt e in zwey gleiche Theile getheilet wird; in diesem Falle ist die Proportion Tab. X. Fig. 49.

wieder anders, und verwandelt sich dieselbige in folgende: es verhält sich sodann ec zu eb, oder seiner gleichen ed wie eb, oder ed zu ea, und wird durch dieses Verhältniß eb oder seine gleiche ed abermal die mittlere Proportionallinie zwischen ec und ea.

Sechs und dreyßigster Lehrsatz.

Wenn aus einem gegebenen Punkte a, der außerhalb einem Zirkel dneocpb liegt, zwey gerade Linien ade und abc durch diesen Zirkel gezogen werden, daß sie selbigen in b und d durchschneiden, und in c und e von innen berühren; so verhält sich ab zu ad, wie ae zu ac; und wie sich verhält ab zu ad, so verhält sich auch de zu bc, und ae zu ac.

Beweis.

Tab. X. Fig. 50. Der Winkel m ist = m, denn jede Größe ist sich selbsten gleich. Der Winkel l + g ist = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln, denn sie stehen auf der geraden Linie ae. Der Winkel f + k ist = 180 Grad, denn sie stehen auf der geraden Linie ac; angulus m + angulo g + angulo f = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln. Angulus f = f; ergo angulus m + angulo g = angulo k.

Angulus g = g, ergo angulus m + angulo f = angulo l; angulus bad = angulo cad. Siehe

Siehe hiervon den dreyßigsten Lehrsatz Fig. 43. Angulus g = angulo h; angulus f = angulo i; ergo angulus h + angulo l = angulo g + angulo l; et angulus i + angulo k = angulo k + angulo f; et ergo verhält sich ad zu ac, wie ab zu ae. Welches das erste war.

Und wie sich verhält ab zu bd, so verhält sich auch ae zu ec. Welches das zweyte war.

Und wie sich verhält ab zu ad, also verhält sich auch de zu bc. Welches das dritte war.

Und wie sich verhält bc zu de, so verhält sich auch db zu ce. Welches das vierte war.

Und wie sich verhält bc zu de, so verhält sich auch der Bogen bpc zum Bogen dne. Welches das fünfte war.

Und wie sich endlich verhält die Chorde bc zu ihrem Bogen bpc, so verhält sich auch die Chorde de zu ihrem Bogen dne. Welches das sechste und zu beweisen war.

Sieben und dreyßigster Lehrsatz.

Wenn aus einem Punkt a zwey gerade Linien ab und acd gehen, und durch einen Zirkel bndeoc dergestalt gezogen werden, daß die gerade Linie ab den Zirkel nur in b berühret, die andre gerade Linie acd aber den Zirkel in c durchschneidet, und in d berühret, so ist die be-

rührende Linie ab die mittlere Proportionallinie zwischen den geraden Linien ac und cd.

Beweis.

Tab. X. Fig. 51. be ist der Durchmesser des Zirkels bndeoc, ergo ist der Winkel k ein rechter Winkel = 90 Grad. Angulus abe = 90 Grad = einem rechten Winkel, denn jede Tangente ab stehet auf dem Diameter be, welcher aus dem Berührungspunkt b durch den Zirkel gezogen worden, winkelrecht; ergo ist der halbe Bogen bcoe des Zirkels bcoedn das Maaß des rechten Winkels abe, der Winkel g + dem Winkel h ist = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo ist auch nur die Hälfte des Bogens coe, das Maaß des Winkels h; et ergo ist auch nur die Hälfte des Bogens cb das Maaß des Winkels f, wie auch das Maaß des Winkels y; denn sowohl der Winkel h als der Winkel f und der Winkel y sind Peripheriewinkel, und jeder Peripheriewinkel hat nur die Hälfte seines Bogens, worauf er stehet, zu seinem Maasse. Welches das erste war.

Der Winkel i ist sich selbsten gleich, und gemeinschaftlich den Dreyecken abc und abd. Der Winkel g ist = dem Winkel f; ergo ist der Winkel l = dem Winkel g + dem Winkel h + dem Winkel n; et ergo ist der Triangel abc ähnlich dem Triangel abd. Welches das zweyte war.

Es

Es verhält sich aber a c zu c b, wie a b zu d b; derohalben verhält sich auch a c zu a b, wie a b zu a d; et ergo wie sich verhält a b zu b c, so verhält sich auch a d zu d b. Welches das dritte und zu beweisen war.

Acht und dreyßigster Lehrsatz.

Wenn zwey einander berührende gerade Linien a b und a c nach d und e willkührlich in directione recta verlängert werden, und man setzt sodann auf diese verlängerten Linien b d und c e aus b nach f die Länge der Linie a b, und aus c nach g die Länge der geraden Linie a c, b f aber nochmals aus f nach h, und c g aus g nach i; und man ziehet sodann die Punkte b, c, f, g, h, i, durch gerade Linien b c, f g, h i zusammen, so verhält sich alsdenn a c zu c b, wie a g zu g f, oder wie a i zu i h; setzet man aber nur die Distanz a b aus b nach f, und aus f nach h, und ziehet mit der geraden Linie b c aus f und h die Parallelen f g und h i, so wird alsdenn auch c g = g i = a c seyn.

Beweis.

Der Winkel m ist = dem Winkel n, denn wenn zwey gerade Parallellinien von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, so sind die Wechselwinkel einander gleich, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 23 et 25. Der Winkel p ist = dem Winkel q, aus nur berühr- Tab. X. Fig. 52.

 ter

ter Urſache, ſiehe den erſten Band Regul. Geometr. cit. ab = bf per conſtructionem; ergo iſt der Triangel acb = et ∽ triangulo bkf. Welches das erſte war.

ac = bk, cb = gk; ergo cg = bk; et bc = gk; et ergo cg = ac. Welches das zweyte war.

Der Winkel r iſt = dem Winkel p; und der Winkel o iſt = dem Winkel m; der Winkel m iſt = dem Winkel n; ſiehe den erſten Band Regul. Geometr. cit. Ergo iſt auch der Winkel o = dem Winkel n, der Winkel q iſt = dem Winkel p; ergo iſt auch der Winkel r = dem Winkel q; ſiehe den erſten Band Regul. Geometr. cit. fg = li; ergo gi = fl; et ergo gi = ac. Welches das dritte und zu beweiſen war.

Zuſatz.

Da alle Triangel die Hälfte eines Vierecks ſind, welches mit dem Triangel gleiche Baſis und Höhe hat, und da ein jedes Quadratum, Parallelogrammum, Rhombus und Rhomboides noch einmal ſo groß iſt, als ein Dreyeck, welches mit dieſen Quadrangulis gleiche Grundlinie und Höhe hat, ſo iſt auch der Triangel acb die Hälfte des Rhomboidis bcgk, und der Rhomboides fgil iſt noch einmal ſo groß, als die Triangel bkf und flh zuſammengenommen.

Neun

Neun und dreyßigster Lehrsatz.

Wenn in einem Triangel acb der Winkel dbe, durch eine gerade Linie bf, in g in zwey gleich große Winkel l und m getheilet wird, so verhalten sich die dadurch auf der geraden Linie ca entstandenen Theile cf und fa wie die Seiten cb und ba des Triangels acb, das ist: es verhält sich sodann cf zu cb, wie fa zu ba.

Beweis.

cb = bh, angulus i + angulo k = angulo l + angulo m; siehe den ersten Band Regul. Geometr. Angulus i = angulo k, et angulus l = angulo m, per constructionem; der Winkel hbc ist sich selbsten gleich. In jedwedem Triangel sind die drey Winkel, welche selbiger einschließet = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln. Der Winkel hbc ist sich selbsten gleich, der Winkel hbc + dem Winkel l + dem Winkel m ist = 180 Grad; denn auf einer jeden geraden Linie kann aus einem angenommenen Punkte ein halber Zirkel beschrieben werden. Ergo angulus m + angulo l = angulo i + angulo k; da nun der Winkel k = dem Winkel m, und der Winkel i = dem Winkel l; ergo gehet die gerade Linie bf mit der geraden Linie ch parallel; et ergo verhält sich auch die gerade Linie cf zu bh, wie af zu ab. Welches das erste war.

Tab. XI. Fig. 53.

cb = ch; ergo verhält sich fc zu cb, wie af zu ab; et ergo wie sich verhält fc zu af, also verhält sich auch cb zu ba. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Vierzigster Lehrsatz.

Wenn drey gerade Linien ab, cd, gh gegen einander proportioniret sind, so ist das Quadrangulum rectangulum abdc, welches von den äußersten Linien ab und gh, das ist, von der ersten und dritten Proportionallinie construirt worden ist, gleich dem Quadrat efgh, so man auf der mittlern oder zweyten Proportionallinie cd aufgerichtet hat, und vice versa. Wenn das Quadratum perfectum efgh = dem Parallelogrammo rectangulo abdc, so ist die Basis ab und Höhe ac des Parallelogrammi rectanguli abdc, gegen eine Seite eg oder ef des Quadrats efhg, proportionirt.

Beweis.

Tab. XI. Fig. 54. Wie sich verhält gh zu cd, oder seiner gleichen ef, also verhält sich auch ef oder seine gleiche cd zu ab; ergo ist das Parallelogrammum rectangulum abcd, aus ab und gh construiret, gleich dem Quadrat efgh, so man auf der geraden Linie cd oder seiner gleichen ef aufgerichtet hat; ef = cd; ergo efgh Quadratum perfectum. Welches zu beweisen war.

Ein

Ein und vierzigster Lehrsatz.

Wenn vier gerade Linien ab, cd, ef, gh gegen einander in Proportion stehen, so wird das Quadrangulum rectangulum abdc, so aus den beyden äußersten Proportionallinien ab und gh errichtet worden ist, gleich seyn dem Quadrangulo rectangulo efhg, so man aus den beyden mittelsten Proportionallinien cd und ef aufgesetzt hat.

Beweis.

Angulus i = 90 Grad, = einem rechten Winkel; ergo stehet ca auf ab perpendikular. Angulus k = 90 Grad = einem rechten Winkel, ergo stehet ge auf ef in directione perpendiculari. Ergo angulus i = angulo k. Welches das erste war. Tab. XI. Fig. 55.

Wie sich verhält ab zu cd, so verhält sich auch ef zu gh, und wie sich verhält ab zu ef, also verhält sich auch cd zu gh; ergo ist das Quadrangulum abdc, so von der ersten geraden Linie ab, und von der vierten geraden Linie gh construirt worden, gleich dem Parallelogrammo rectangulo efgh, so von den beyden mittlern Proportionallinien cd und ef zusammengesetzt ist. Welches das zweyte war.

Und weil die Quadrangula rectangula abdc und efgh einander gleich sind, so sind auch die vier geraden Linien ab, cd, ef, gh, woraus

 diese

diese Quadrangula rectangula construiret worden sind, gegen einander proportionirt. Welches das dritte und zu beweisen war.

Zwey und vierzigster Lehrsatz.

Wenn vier gerade Linien ab, cd, ef, gh gegen einander in Proportion stehen, und auf diese proportionirte Linie ähnliche Figuren und Rechtecke abcd, efgh, iklm, nopq construirt werden, so werden diese vier Figuren ihrem Flächeninhalte nach auch proportionirt seyn, und in eben dem Verhältnisse, als wie die proportionirten geraden Linien ab, cd, ef, gh, seyn.

Beweis.

Tab. XII. Fig. 56. Die gerade Linie ab verhält sich zur geraden Linie cd, wie die gerade Linie ef zur geraden Linie gh. Welches das erste war.

Ergo verhält sich auch die gerade Linie ab zur geraden Linie ef, wie die gerade Linie cd zur geraden Linie gh. Welches das zweyte war.

Das Quadratum perfectum abcd der ersten Proportionallinie ab ist ähnlich dem Quadrato perfecto efgh, construirt auf der zweyten Proportionallinie cd. Das Quaddratum perfectum iklm, so man auf der dritten Proportionallinie ef aufgerichtet hat, ist ähnlich dem Quadrato perfecto nopq, welches auf der vierten Proportionallinie gh construirt worden ist; ergo

ergo verhält sich das Quadrat abcd zum Quadrat efgh, wie das Quadrat iklm zum Quadrat nopq. Welches das dritte war.

Et ergo verhält sich auch das Quadrat abcd zum Quadrat iklm, wie das Quadrat efgh zum Quadrat noqp. Welches das vierte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Suchet man zu ab und cd die dritte Proportionallinie ik, und zu ef und gh die dritte Proportionallinie lm, und construirt auf solchen, zu den auf ab, ef, lm und pq stehenden Figuren, andre ähnliche Figuren, als wie z. E. die regulären Fünfecke arstb und iuvwk, wie auch die Dreyecke exf und nyo; so verhalten sich solche auch gegen und unter einander, wie das erste und dritte, oder zweyte und vierte Quadrat. Wollte man nun auch, wie bereits erwähnet, auf die geraden Linien ab und ef des ersten und dritten Quadrats, irreguläre Vielecke, als das ungleichseitige Pentagonum abtsr, und das ungleichseitige Fünfeck ikwvu, aufrichten, so wird sich das Quadrat abcd zu seinem irregulären Fünfeck abtsr verhalten, wie das Quadrat iklm zu seinem irregulären Fünfeck ikwvu; oder aber: so wie sich verhält das Quadrat abcd zum Quadrat iklm, so verhält sich auch das ungleichseitige Fünfeck arstb zum ungleichseitigen Fünfeck iuvwk.

Zweyter Zusatz.

Construirt man aber, wie schon gesagt, auf die zweyte Proportionallinie c d, und vierte Proportionallinie g h, in die beyden Quadrata e f g h und n o p q die gleichseitigen Triangel e x f und n y o; so verhält sich das Quadratum perfectum e f g h zu seinem Triangulo aequilatero e f x, wie das Quadratum perfectum n o p q zu seinem gleichseitigen Triangel n y o. Ferner wie sich verhält das Quadrat e f g h zum Quadrat n o p q, so verhält sich auch das gleichseitige Dreyeck e f x zum gleichseitigen Dreyeck n o y.

Dritter Zusatz.

Demnach verhält sich auch das irreguläre Fünfeck a b r s t zu seinem Quadrat a b c d, wie sich verhält das irreguläre Fünfeck i k u v w zu seinem Quadrat i l m k. Item: es verhält sich auch der gleichseitige Triangel e f x zu seinem Quadrat e f g h, wie sich verhält der gleichseitige Triangel n o y zu seinem Quadrat n o p q. Item: es verhält sich das irreguläre Fünfeck a b t s r, nebst seinem Quadrat a c d b zum gleichseitigen Triangel e x f und seinem Quadrat e g h f, wie das irreguläre Fünfeck i u v w k, nebst seinem Quadrat i l m k, zum Triangulo aequilatero n y o und seinem Quadrat n p q o.

Drey

Drey und vierzigster Lehrsatz.

Wenn drey gerade Linien ab, cd, ef mit einander parallel gehen, und man ziehet von der erstern ab, bis zur dritten ef, zwey andre gerade Linien gi und hk nach Willkühr, welche die mittlere cd in l und m schneiden, so verhält sich erstens km zu mh, wie il zu lg. Und theilet man die gerade Linie ig in willkührliche gleiche Theile, aus welchen man hernach mit ab bis an die gerade Linie kh Parallelen ziehet, so wird auch kh zweytens durch selbige in so viel gleiche Theile getheilet werden, als in wie viel Theile man ig eingetheilet hat. Tab. XII. Fig. 57.

Beweis.

Die Linien i 1, = $\frac{1}{5}$ ig. i 1. = 1, 2. = 2, 3. = 3, 4. = 4, g; 1, 1. 2, 2. 3, 3. 4, 4 sind mit ab parallel per constructionem; ergo ist i, 1. = 1, 2; = 2, 3; = 3, 4; = 4, g; et ergo verhält sich il zu lg, wie km zu mh. Welches zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also wird auch erwiesen, daß sich verhält gl zu gi, wie hm zu hk; item: wie sich verhält gl zu gi, so verhält sich auch hm zu mk; und wie sich verhält il zu km, so verhält sich auch lg zu mh.

Zweyter

Zweyter Zusatz.

Also sind alle gerade Linien zwischen den parallel- oder gleichlaufenden geraden Linien proportionirt, das ist, verhältnißmäßig.

Dritter Zusatz.

Tab. XII. Fig. 58. Wenn man also zwey Parallellinien a b, c d aus ihren Endpunkten durch gerade Linien a d und b c zusammenziehet, so werden sie sich in e schneiden, und verhält sich alsdenn b e zu e c, wie a e zu e d; item: wie sich verhält a e zu a b, so verhält sich auch e d zu d c; ferner verhält sich auch e b zu b a, wie e c zu c d; der Winkel w verhält sich zum Winkel y, wie der Winkel x zum Winkel z; denn wenn zwey Parallellinien von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, so sind die Wechselwinkel einander gleich, und derohalben ist auch der Triangel a b e ähnlich dem Triangel c d e.

Vierter Zusatz.

Tab. XII. Fig. 59. Auch entstehen folgende Proportionen, wenn man in einem Triangel a b c mit der Basis oder Grundlinie a c eine Parallele d e ziehet. Es verhält sich nämlich b d zu d a, wie b e zu e c; item: es verhält sich auch b d zu b a, wie b e zu b c; ferner: wie sich verhält b d zu d e, so verhält sich auch b c zu c a; item: wie sich verhält b d zum Triangel b d e, so verhält sich auch b a zum Triangel b a c.

Fünfter

Fünfter Zusatz.

Wenn sich demnach in einem Triangel abc, ca verhält zu ce, wie cb zu cd, und man ziehet die Linie de mit ba parallel, so ist das Verhältniß just wie im vorhergehenden vierten Zusatz Fig. 59.; zöge man aber statt der Linie de die Linie df auf ac perpendikulär, so ist df mit ba nicht parallel, und die Proportion von cf zu ca ganz anders, denn man müßte sodann mit df aus b eine Parallele ziehen, und es bliebe alsdenn in dem Triangel abc ein kleines Dreyeck übrig, wegen dessen man den ganzen Triangel nicht proportioniren oder vergleichen kann. Tab. XII. Fig. 60.

Vierter

Vierter Abschnitt.

Von den Winkeln.

A. Von den Winkeln, so durch die Zirkellinie entstehen.

Vier und vierzigster Lehrsatz.

Jeder Winkel a in einem halben Zirkel bcd ist ein rechter Winkel, denn er stehet auf dem Diameter bd des Zirkels bcde, und ist also sein Maaß der halbe Zirkel oder Bogen bed des Zirkels bcde.

Beweis.

Tab.XIII. Fig. 61. Die gerade Linie bd hält 180 Grad oder zwey rechte Winkel, weil auf selbiger aus einem angenommenen Punkte h ein halber Zirkel bcd oder bed beschrieben werden kann; siehe hiervon den ersten Band Regul. Geometr. 58., wie auch die Anmerkung der Regul. Geometr. 68. Also ist der geraden Linie bd ihr Maaß der halbe Zirkel bcd, denn der Winkel f + g ist = zweyen rechten Winkeln, oder zweymal 90 Grad, und jeder Winkel bcd, so von beyden Endpunkten b und d des Diameters bd, bis in einen

in

in dem halben Bogen b c d des Zirkels b c d e liegenden Punkt c, durch gerade Linien b c und d c, zusammengezogen wird, ist ein rechter Winkel. Welches zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also kann man ganz leicht, vermöge dieses Lehrsatzes, einen Winkelhaken versuchen.

Zweyter Zusatz.

Also kann man auch am Ende einer gegebenen Linie eine Perpendikularlinie errichten.

Fünf und vierzigster Lehrsatz.

Alle auf einer geraden Linie d e stehende, neben einander gesetzte Winkel a, + b, + c, oder d h f, f h g, g h e sind gleich zweyen rechten Winkeln, denn sie haben 180 Grad oder einen halben Zirkel d f g e zu ihrem Maaße.

Beweis.

h d = h e, per constructionem h f = h d = h g = h e, denn alle Radii eines Zirkels sind einander gleich. Ergo arcus d f g e = semicirculo per constructionem; arcus d f = arcui f g e per constructionem, ergo angulus a = angulo b + angulo c; angulus a = 90 Grad = dem rechten Winkel; ergo angulus b + c = 90 Tab. XIII. Fig. 62.

90 Grad = einem rechten Winkel. Welches das erste war. Ergo anguli a + b + c = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Wenn also der Winkel a ein rechter Winkel ist, so muß der Winkel b + c auch ein rechter Winkel seyn.

Zweyter Zusatz.

Wenn der Winkel a + b ein stumpfer Winkel ist, so muß der Winkel c ein spitziger Winkel seyn. Und umgekehrt, wenn der Winkel c ein spitziger Winkel ist, so muß dessen Complementum, nämlich der Winkel a + b, ein stumpfer Winkel seyn.

Dritter Zusatz.

Wenn der Winkel c bekannt, so kann man den Winkel a + b leicht finden, wenn man nämlich seine Größe oder Maaß von 180 Graden, als dem Maaße des halben Zirkels, abzieht.

Vierter Zusatz.

Wenn man auf dem Felde einen Winkel messen soll, und man kann zum Winkel a + b nicht kommen, so messe man statt dieses Winkels den Winkel c, als dessen Complementum, und subtrahire diesen gemessenen Winkel c von 180

Grad,

Grad, so ist die Differenz der verlangte Winkel a + b.

Sechs und vierzigster Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie a b einen Zirkel c d e f in f berühret, und von dem Berührungspunkte f eine gerade Linie oder der Diameter f d durch das Centrum g gezogen wird, so sind die Winkel o + h und p + i, so die berührende Linie a b mit dem Diameter f d macht, gleich den beyden Peripheriewinkeln m und n, welche einander im Zirkel f c d e entgegengesetzt sind, oder gegen über liegen.

Beweis.

Angulus m = 90 Grad = einem rechten Winkel, siehe den vier und vierzigsten Lehrsatz Fig. 61.; angulus n = 90 Grad = einem rechten Winkel, siehe den nurerwähnten vier und vierzigsten Lehrsatz; denn sie haben beyde jeder einen halben Zirkel f c d und f e d zu ihrem Maaße. Welches das erste war. Tab. XIII. Fig. 63.

Angulus o + angulo h = 90 Grad = einem rechten Winkel: denn der Diameter d f gehet durchs Centrum g, und stehet auf der Tangente a b in f perpendikulär. Angulus i + angulo p = angulo h + angulo o; ergo angulus i + angulo p = 90 Grad = einem rechten Winkel. Welches das zweyte war.

Et ergo angulus o + angulo h = angulo m, et angulus p + angulo i = angulo n. Welches das dritte und zu beweisen war.

Zusatz.

Tab. XIII. Fig. 64. Gehet aber die gerade Linie ab von der Tangente cd aus a nicht durch das Centrum e, sondern schräge wie ab, so wird selbige auf der Tangente cd einen spitzigen Winkel h + g, und einen stumpfen Winkel i + k + p formiren. Welches das erste war.

Hat man aber aus dem Berührungspunkt a die Perpendikulare af winkelrecht durch das Centrum e erhöhet oder gezogen, und die gerade Linie fb von der Perpendikulare af bis zur schrägen geraden Linie ab aus f bis b gezogen, so ist der Winkel m + n = dem Winkel k + p, oder = dem Winkel i + g + h. Welches das zweyte war.

Formiret man ferner durch die gezogenen geraden Linien bs und sa einen Peripheriewinkel o, desgleichen durch bt und at wiederum willkührlich den Peripheriewinkel l, so sind die Winkel o + l = zweyen rechten Winkeln = zweymal 90 Grad, und die Winkel n + q mit den Winkeln k + i + g zusammen genommen = den Winkeln o + l = zweymal 90 Grad = zweyen rechten Winkeln. Welches das dritte war.

Der

Der Winkel m + dem Winkel n ist = 90 Grad = einem rechten Winkel, ergo ist der Winkel r + dem Winkel i = 90 Grad = einem rechten Winkel, et ergo ist der Winkel r + dem Winkel i = dem Winkel i + dem Winkel g + dem Winkel h, und = dem Winkel k + dem Winkel p. Welches das vierte war.

Der Winkel g + dem Winkel h ist = dem Winkel r; und der Winkel r ist = dem Winkel o; ergo ist auch der Winkel o = dem Winkel g + h; der Winkel o + dem Winkel l sind beyde zusammengenommen = zweymal 90 Grad = zweyen rechten Winkeln, und die Winkel n + q + k + i + g sind zusammengenommen auch = zweymal 90 Grad = zweyen rechten Winkeln; ergo ist der Winkel r = dem Winkel l = zweyen rechten Winkeln = zweymal 90 Grad; et ergo ist der Winkel r + dem Winkel l = dem Winkel i + dem Winkel g + dem Winkel h + dem Winkel k + dem Winkel l. Welches das fünfte war.

Der Winkel r ist = dem Winkel g + dem Winkel h; der Winkel r ist = r, oder auch sich selbsten gleich, so wie der Winkel g + dem Winkel h, zusammengenommen, sich selbsten gleich sind, ergo ist der Winkel l = dem Winkel i + dem Winkel k + dem Winkel p. Welches das sechste und zu beweisen war.

Zusatz.

Auch ist der Triangel f b w ähnlich dem Triangel s w a; denn die beyden Peripheriewinkel o und r sind einander gleich, denn sie stehen auf einem Bogen a t b; auch sind die beyden Peripheriewinkel k und m einander gleich, denn sie stehen auf einem Bogen s f, und der Winkel u ist = dem Winkel w, denn wenn zwey gerade Linien s a und a f sich durchkreuzen, so sind die Scheitelwinkel u und w einander gleich; ergo ist der Triangel f b w ähnlich dem Triangel s w a.

Sieben und vierzigster Lehrsatz.

Alle Winkel a g b, b g c, c g d, d g e, e g f, f g a, so um ein gemeinschaftliches Centrum g herumstehen, betragen so viel, als vier rechte Winkel, oder 360 Grad, denn sie haben einen ganzen Zirkel a b c d e f zu ihrem Maaße.

Beweis.

Tab.XIII. Fig. 65. Der Winkel a g b hat den Bogen a b, der Winkel b g c den Bogen b c, der Winkel c g d den Bogen c d, der Winkel d g e den Bogen d e, der Winkel e g f den Bogen e f, und der Winkel f g a den Bogen f a zu seinem Maaße. Welches das erste war.

Die Bogen a b + b c + c d + d e + e f + f a sind = der ganzen Peripherie des Zirkels a b c d e f a; ergo sind auch die Winkel i + k

+ l

$+ l + m + n + h$, welche um das Centrum g herumstehen, = 360 Grad = vier rechten Winkeln. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Wenn diese Winkel alle einander gleich sind, so kann man derselben Größe oder Maaß leicht finden, wenn man 360 Grad durch die Anzahl dieser um ein gemeinschaftliches Centrum stehenden Winkel dividiret.

Zweyter Zusatz.

Und folglich läßt sich auch leicht sowohl die Peripherie eines Zirkels, als auch der ganze Zirkel selbsten, in verschiedene gleiche Theile theilen.

Dritter Zusatz.

Also läßt sich auch füglich ein reguläres Vieleck in einem gegebenen Zirkel construiren.

Vierter Zusatz.

Demnach sind auch die Centriwinkel der regulären Vielecke bloß durch die allgemeine Division zu finden.

Acht und vierzigster Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie a d eine andere gerade Linie c b in e durchschneidet, so sind die anguli

li verticales f und g, wie auch h und i, einander gleich.

Beweis.

Tab. XIII. Fig. 66. Angulus h + angulo f = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln = dem halben Zirkel, denn sie stehen auf der geraden Linie cb. Angulus f + angulo i = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln = dem halben Zirkel, denn sie stehen auf der geraden Linie ad. Angulus f = f, denn jede Größe ist sich selbsten gleich, siehe den ersten Band Regul. Arithm. 1.; ergo angulus h = angulo i, denn wenn man gleiches von gleichem abziehet, bleibt gleiches übrig, siehe den ersten Band Regul. Arithm. 19. Angulus f = angulo i = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln = dem halben Zirkel; angulus i + angulo g = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln = dem halben Zirkel; angulus i = i, denn jede Größe ist sich selbsten gleich; ergo angulus f = angulo g, denn wenn man gleiches von gleichem wegnimmt, bleibt gleiches übrig; et ergo angulus h = angulo i; et angulus f = angulo g. Welches zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Man kann also einen Verticalwinkel statt einen andern vermessen oder annehmen.

Zweyter Zusatz.

Man kann also auch den zwischen den Verticalwinkeln f und g liegenden Winkel h oder i finden, wenn man die Anzahl Grade der Winkel f und g von 360 Graden subtrahiret, und die Differenz halbiret.

Neun und vierzigster Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie a b verschiedene in einem Punkt c zusammenlaufende gerade Linien oder Winkel d c, e c, f c, g c in dem Durchschneidungspunkt c durchschneidet, so sind die Winkel h + i + k + l auf der einen Seite dieser geraden Linie a b = den Winkeln m + n auf der andern Seite dieser Linie.

Beweis.

Angulus h + angulo i + angulo k + angulo l + angulo m + angulo n = 360 Grad = vier rechten Winkeln = dem ganzen Zirkel, denn sie stehen um ein gemeinschaftliches Centrum c; siehe den sieben und vierzigsten Lehrsatz Fig. 65. a b = a b = der geraden Linie = dem Maaße des halben Zirkels; ergo angulus h + angulo i + angulo k + angulo l = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln = dem halben Zirkel; ergo angulus m + angulo n = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln = dem halben Zirkel; ergo angulus h + angulo i T. XIV. Fig. 67.

+ angulo k + angulo l = angulo m + angulo n. Welches zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Folglich sind alle Winkel, so um ein gemeinschaftliches Centrum c herumstehen, zusammengenommen, vier rechten Winkeln gleich.

Zweyter Zusatz.

T. XIV. Fig. 68.

Wenn demnach an zwey gerade und mit einander parallellaufende Linien be und df eine andre gerade Linie eg perpendikulär oder schräge angehängt wird, so entstehen daraus zwey Winkel h und i; stehet diese Linie eg auf eb und df perpendikulär, so sind die beyden Winkel h und i einander gleich, und zwey rechte Winkel. Stehet aber diese gerade Linie eg auf be und df nicht perpendikulär, so ist der Winkel h zwar = dem Winkel i, sie sind aber beyde entweder spitzig oder stumpf, je nachdem diese gerade Linie eg angehängt ist. Verlängert man aber diese Linie be und df nach a und c, wie ba und dc, so wird der Winkel k = dem Winkel f. Wenn aber der Winkel k kleiner wäre, als der Winkel f, so würden die geraden Linien ba und dc sich endlich auf der Seite von ac berühren oder gar schneiden, und wäre alsdenn auch der Winkel k nicht gleich dem Winkel f, noch der Winkel h = dem Winkel i; und folglich würde ba mit dc nicht parallel seyn.

Dritter

Dritter Zusatz.

Wenn sich also zwey gerade Linien ab und cd in g schneiden, und man ziehet in derselben Gegend eine dritte gerade Linie ef mit ab parallel, so muß selbige, wenn man nämlich alle drey Linien ab, cd und ef verlängerte, eine von den geraden Linien ab oder cd durchschneiden; denn wenn man aus dem Durchschnittspunkt g der geraden Linien ab und cd noch eine gerade Linie gh durch die gerade Linie ef ziehet, so muß selbige nothwendiger Weise den Winkel i + l kleiner oder größer machen, als den Winkel k. T. XIV. Fig. 69.

B. Von den Winkeln, so durch die Parallellinien entstehen.

Funfzigster Lehrsatz.

Wenn zwey Parallellinien ab und cd von einer dritten geraden Linie ef in g und h durchschnitten werden, so sind die Wechselwinkel i und k einander gleich; item: es ist auch der äußere Winkel o so groß, als dessen Wechsel- oder Scheitelwinkel i oder k, und dann betragen ferner die beyden innern Winkel p + k, zusammengenommen, 180 Grad oder zwey rechte Winkel.

Beweis.

Angulus n = angulo q = 90 Grad = einem rechten Winkel; denn gl stehet auf cd, und hm T. XIV. Fig. 70.

auf

auf ab senkrecht oder perpendikulär, siehe den ersten Band, 79. **Erklärung** Fig. 74. Angulus i + angulo p = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln, denn sie stehen auf der geraden Linie ab; siehe hiervon den **fünf und vierzigsten Lehrsatz** Fig. 62. Angulus p + angulo o = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln, siehe hiervon den **fünf und vierzigsten Lehrsatz** cit.; angulus p = p, denn jede Größe ist sich selbsten gleich; angulus i = angulo o, siehe den **acht und vierzigsten Lehrsatz** Fig. 66.; ergo angulus o = angulo k, denn alle Wechselwinkel zwischen den Parallellinien sind einander gleich; derohalben ist auch der Winkel i = dem Winkel k. Welches das erste war.

Angulus p + angulo o = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln = dem halben Zirkel = dem Maaße einer geraden Linie, weil auf jeder geraden Linie aus einem auf selbiger angenommenen Punkte ein halber Zirkel beschrieben werden kann. Welches das zweyte war.

Ferner ist hm = gl und hq = qm = ln = ng per constructionem; hm ist die Chorde des Bogens hrm, so wie gl die Chorde des Bogens gsl ist. Ergo ist die halbe Chorde hq = der halben Chorde qm; et ergo ist auch der Bogen hr = dem Bogen rm; die halbe Chorde gn ist = der halben Chorde nl; ergo ist auch der halbe Bogen gs = dem halben Bogen

Bogen sl; der Bogen sg ist das Maaß des Winkels i, und der Bogen hr ist das Maaß des Winkels k; ergo ist der Winkel i = dem Winkel k, und weil der Winkel i = dem Winkel o, und der Winkel i = dem Winkel k; ergo ist auch der Winkel o = dem Winkel k. Welches das dritte war.

Angulus i + angulo p = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln; angulus i = angulo k; ergo angulus k + angulo p = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln. Welches das vierte und zu beweisen war.

Zusatz.

Will man demnach wissen, ob ein Paar gerade Linien, wie ab und cd, recht parallel mit einander gehen, so darf man nur durch selbige eine willkührliche schräge Linie fe ziehen, und aus den Durchschnittspunkten g und h die Winkel oder Bögen i und k ziehen, und derselben Spannung oder Chorden gegen einander messen. Sind diese Chorden i und k beyde gleich, so sind die Parallellinien richtig; wo nicht, so gehen ab und cd nicht parallel mit einander.

Ein und funfzigster Lehrsatz.

Wenn zwey Parallellinien ab und cd von einer dritten geraden Linie ef in g und h durchschnitten werden, so sind die Wechselwinkel i und

k

k einander gleich; siehe vorhergehenden funfzigsten Lehrsatz Fig. 70.

Beweis.

T. XIV. Fig. 71. Dieser Beweis gründet sich in allem auf vorhergehenden funfzigsten Lehrsatz; denn der Winkel h + dem Winkel m sind zusammengenommen 180 Grad, so wie der Winkel m + dem Winkel k auch 180 Grad oder zwey rechte Winkel betragen; weil der Winkel m + dem Winkel k auf der geraden Linie cd stehet. Desgleichen ist auch der innre Winkel k = dem äußern Winkel i. Wenn man aber die geraden Linien ab und cd nach s verlängern wollte, und der Winkel i + n wäre größer, als der Winkel k, so würde die gerade Linie ab, welche jetzund in die gerade Linie ls verwandelt worden, mit der geraden Linie cd endlich in einem Punkt s zusammenlaufen, und folglich ls mit cd nicht parallel gehen. Welches also unsere Lehrsatz beweiset.

Erster Zusatz.

Also kann einer geraden Linie cd durch einen Punkt h nur eine einzige Parallele ab gezogen werden; denn wenn man eine andere, als wie z. E. ls, ziehen wollte, so würde sich solche gegen cd auf der Seite von d mehr neigen, und also auf einer Seite der Winkel h um den Winkel o grösser als der Winkel k, auf der andern Seite aber würde der Winkel n + dem Winkel p um den Winkel n kleiner werden, als der Winkel m.

Welches

Welches wiederum unserm vorhergehenden funfzigsten Lehrsatz ganz zuwider ist.

Zweyter Zusatz.

Weil demnach der Winkel bhf = dem Winkel dgf, so sind auch, wenn zwey gerade Parallellinien ab und cd von einer dritten geraden Linie ef durchschnitten werden, die Wechselwinkel h und k einander gleich.

Dritter Zusatz.

Und weil die Winkel h + p + n = zweyen rechten Winkeln = 180 Grad sind, so wird auch der Winkel i + dem Winkel r 180 Grad betragen; ergo ist auch der Winkel g + dem Winkel p + dem Winkel n so wie der Winkel k + dem Winkel o + dem Winkel q = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln.

Vierter Zusatz.

Derohalben wenn eine gerade Linie auf einer von zweyen geraden Parallellinien perpendikulår aufstehet, so stehet solche auch auf der andern und folglich auf allen beyden perpendikulår.

Zwey und funfzigster Lehrsatz.

Wenn eine gerade Linie ab über zwey andre gerade Linien cd und ef weggezogen wird, und die umwechselnden Winkel o und h einander gleich

gleich sind oder gleich werden, so sind die geraden Linien c d und e f parallel.

Beweis.

Tab. XV. Fig. 72. Wenn diese geraden Linien c d und e f nicht parallel wären, so müssen solche endlich einmal, als wie ein Punkt k, zusammenlaufen, dadurch aber würde der Winkel l + n um den Winkel n kleiner, als der Winkel q, und der Winkel h würde um den Winkel l größer, als der Winkel o; da aber die Winkel l + n = dem Winkel q, so ist die gerade Linie c d mit e f parallel; siehe vorhergehenden **ein und funfzigsten Lehrsatz** Fig. 71. Welches zu beweisen war.

Zusatz.

Daraus folget auch, daß, wenn der Winkel m = den Winkeln l + n, die gerade Linie c d mit e f sodann auch parallel oder gleichlaufend seyn muß. Item: wenn der Winkel m = dem Winkel p, so ist e f mit c d gleichfalls parallel.

Drey und funfzigster Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien a b und c d einer dritten geraden Linie e f parallel sind, so sind sie alle drey unter einander parallel.

Beweis.

Beweis.

Weil ab mit cd parallel gehet, so muß, wenn man über ab und cd eine schräge gerade Linie gh ziehet, laut vorhergehendem funfzigsten, ein und funfzigsten und zwey und funfzigsten Lehrsatze, Fig. 70, 71 et 72., der Winkel i = dem Winkel k seyn, und weil der Winkel k = dem Winkel l, ergo ist auch der Winkel i = dem Winkel l; denn wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so sind sie sich selbst gleich, siehe den ersten Band Regul. Arithm. 2.; et ergo gehet die Linie ab auch mit ef, und ef mit cd parallel. Welches zu beweisen war. Tab. XV. Fig. 73.

Vier und funfzigster Lehrsatz.

Wenn zwey gleichlange gerade Linien ac und bd zwey andre gleichlange gerade Linien cd und ab an ihren äußersten Endpunkten c, d, a, b zusammenhängen, so sind die einander gegen über liegenden geraden Linien nicht allein parallel oder gleichlaufend, sondern auch von egaler Länge, das ist: ab gehet mit cd parallel, und ab ist = cd; item: ac ist mit bd parallel, und ac ist = bd.

Beweis.

Die Diagonallinie ad ist sich selbsten gleich, denn jede Größe ist sich selbsten gleich; ab = cd, Tab. XV. Fig. 74.

et ac = bd; ergo angulus e = angulo f; et angulus g = angulo h; ergo gehet die Linie dc mit der geraden Linie ab parallel. Welches das erste war.

Angulus i = angulo k; ergo ac = bd; et ergo ab = cd. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Zusatz.

Derohalben sind in einem jeden regulären Viereck acdb die einander entgegengesetzten oder gegenüber stehenden Winkel einander gleich, als: der Winkel i ist = dem Winkel k, und die Winkel e + h = den Winkeln f + g.

Fünf und funfzigster Lehrsatz.

Wenn über zwey gerade Linien ab und cd eine dritte gerade Linie ef gezogen wird, und die dadurch entstandenen beyden innern Winkel g und h kleiner werden, als zwey rechte Winkel, so sind die geraden Linien ab und dc nicht parallel; denn wenn man diese Linien ab und dc alle beyde auf der Seite, wo sie mit ihren Endpunten b und c am nächsten beysammenstehen, verlängerte, so würden sie endlich in einen Punkt i zusammenlaufen, und einen Winkel bic oder aid formiren.

Beweis.

Tab. XVI. Fig. 75. Weil der Winkel h um den Winkel k grösser ist, als der Winkel g, denn der Winkel g

+ dem

+ dem Winkel k ist = dem Winkel h, und der Winkel h ist = 90 Grad = einem rechten Winkel, ergo ist der Winkel g + dem Winkel k, auch = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo neigt sich die gerade Linie ab in b gegen die gerade Linie dc, und formirt daher, wenn man sie beyde, nämlich die geraden Linien ab und dc, in directione recta gegen i verlängert, auf cd einen spitzigen Winkel bic, welcher = dem Winkel k seyn muß; dieses aber können parallellaufende gerade Linien nicht thun, denn selbige schließen nie einen Raum ein, folglich muß der Winkel g um den Winkel k größer, das ist, eben so groß seyn, als der Winkel h, oder als der Winkel g, + dem Winkel k, so wird alsdann die gerade Linie lm mit der geraden Linie id parallel laufen. Welches zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Derowegen können zwey gerade Linien no und po nicht aus einer geraden Linie oq entspringen, denn wenn man die gerade Linie no verlängert, so nimmt sie ihre Direction nach r und nicht nach q; ziehet man sie aber nach q, so ist sie eine gebrochene Linie noq, welche in o einen geradlinigten Winkel macht. Tab. XVI. Fig. 76.

Zweyter Zusatz.

Zwey gerade Linien st und ut können also auch keinen Raum einschließen, das ist, keine Tab. XVI. Fig. 77.

Figur geben, siehe hiervon den ersten Band Regul. Geometr. 11.; denn wenn man solche, als wie ts nach v, tu aber nach w, verlängerte, so würden sie, wenn die Verlängerung in directione recta geschähe, sich immer weiter und weiter extendiren, und folglich die dazwischen liegenden geraden Linien su und vw nach und nach länger werden.

C. Von den Centri- und Peripheriewinkeln in den Zirkeln.

Sechs und funfzigster Lehrsatz.

Wenn man in einem Zirkel abpmlc einen Bogen ab nach Willkühr annimmt, und auf solchen einen Winkel acb, dessen Spitze c in die Peripherie dieses Zirkels fällt, construiret, und einen andern adb, dessen Spitze das Centrum d zu seinem Scheitelpunkte hat, beschreibet, so ist der Winkel e an der Peripherie in c halb so groß, als der Winkel f am Centro d.

Beweis.

Tab. XVI. Fig. 78. cd = bd, et cb = cb; ergo angulus g = angulo q; ergo angulus h = angulo g + angulo q; et ergo angulus h = zweyen angulis g. Welches das erste war.

Angulus r + angulo f + angulo h = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln, siehe hiervon

den

den ersten Band Regul. Geometr., wie auch den fünf und vierzigsten Lehrsatz Fig. 62.; dc = da, ca = ca; ergo angulus e + angulo g = angulo t; angulus f + angulo h = zweyen angulis e + zweyen angulis g. Angulus f + angulo h = angulo e + angulo t + angulo g + angulo q; ergo angulus f = zweyen angulis e; et angulus h = zweyen angulis g; et ergo ist der Winkel f + dem Winkel h doppelt so groß, als der Winkel e mit dem Winkel g zusammengenommen. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Wenn man demnach aus c auf dem Diameter cp eine Perpendikularlinie ic zieht, oder auf cp einen rechten Winkel icp errichtet, so wird selbige auf dem Berührungspunkt c aufstehen, und auf cp einen rechten Winkel machen.

Zweyter Zusatz.

Ziehet man aber aus einem außer dem Zirkel apbmlc angenommenen beliebigen Punkt k gegen diesen Zirkel zwey Tangenten kl und km, so werden solche nicht allein von gleicher Länge seyn, sondern noch überdieß auf der dazwischen liegenden Chorde lm zwey gleich große Winkel u und o machen.

Sieben und funfzigster Lehrsatz.

Der Winkel a, am Centro b, eines Zirkels cde, ist doppelt so groß, als der Winkel f an der Peripherie in e, der mit ihm auf gleichen Bogen dc stehet.

Anmerkung.

Tab. XVI. et XVII. Fig. 79, 80 et 81. Dieser Lehrsatz wird auf eine dreyfache veränderte Art durch dreyerley Figuren bewiesen: als erstens Fig. 79., wenn der Centriwinkel a unter dem Peripheriewinkel f stehet, und beyde einen gemeinschaftlichen Schenkel ebc haben. Zweytens Fig. 80., wenn die Winkel an der Peripherie f + i über den Winkeln a + l am Centro b befindlich, und jeder seine besondern Schenkel ed, ec und bd, bc hat. Drittens Fig. 81., wenn die Peripheriewinkel f + h neben den Centriwinkeln a + i aufstehen; und der Diameter ec dem Winkel f, an der Peripherie in e, und dem Winkel a am Centro b, zum gemeinschaftlichen Schenkel cb und ce dienet.

Beweis zur Figur 79.

Tab. XVI. Fig. 79. Angulus a = angulo f + angulo g; siehe den ersten Band Regul. Geometr., item den sechs und funfzigsten Lehrsatz Fig. 78. db = be; denn alle Radii eines Zirkels sind einander gleich, de = de; ergo angulus g + angulo f = angulo a = zweyen angulis f oder zweyen angulis g oder angulo f + angulo g. Welches das erste war.

Beweis zur Figur 80.

Angulus a = zweyen angulis f; et angulus l = zweyen angulis i, oder zweyen angulis k oder angulo i + k; ergo angulus a + angulo l = zweyen angulis f + zweyen angulis i, oder angulo f + angulo g + angulo i + angulo k. Welches das zweyte war.

Tab. XVI. Fig. 80.

Beweis zur Figur 81.

Angulus a + angulo i = zweyen angulis f + zweyen angulis h, denn der Winkel a ist doppelt so groß, als der Winkel f, und der Winkel i ist doppelt so groß, als der Winkel h; ergo angulus a = zweyen angulis f, et angulus i = zweyen angulis h. Welches das dritte und zu beweisen war.

T. XVII. Fig. 81.

Erster Zusatz.

Da nun der Peripheriewinkel f die Hälfte des am Centro b stehenden Winkels a ist, so muß auch die Hälfte des Bogens c d das Maaß des Winkels f seyn.

Zweyter Zusatz.

Also ist aus dem Centriwinkel leicht der Peripheriewinkel zu finden.

Dritter Zusatz.

Folglich sind alle Peripheriewinkel, so auf gleichen Bogen und in gleichen Zirkeln stehen, einander gleich.

Vierter Zusatz.

Also läßt sich ein jeder Winkel, er sey ein Peripherie- oder Centriwinkel, nach Willkühr halbiren und dupliren.

Acht und funfzigster Lehrsatz.

T. XVII. Fig. 82. Wenn zwey oder mehrere Winkel fce und fde an der Peripherie in c und d eines Zirkels fcde mit ihren Spitzen f und e sich endigen, und mit ihren Seiten cf, ce und df, de auf einem Bogen fe aufstehen, so sind sie einander gleich, denn sie haben einerley Maaß; siehe **vorhergehende vier Lehrsätze und deren Figuren**, als woraus solches klar und also keines weitern Beweises bedarf.

Neun und funfzigster Lehrsatz.

In gleichen Zirkeln alcpb und imfe haben gleiche Centriwinkel g und h, und gleiche Peripheriewinkel i und k gleiche Bogen alc und imf zu ihrem Maaße. Der Beweis gründet sich besonders auf vorhergehenden **sieben und funfzigsten Lehrsatz** Fig. 80.

Beweis.

T. XVII. Fig. 83 et 84. Der Radius da ist = dem Radio dc, der Radius ai ist = dem Radio af, ad = ia, ac = if; ergo triangulum adc = et ∽ triangulo iaf; ergo

ergo angulus g = angulo h. Welches das erste war.

Angulus g = angulo h, angulus g = zweyen angulis i; angulus i = angulo k; ergo angulus h = zweyen angulis k; angulus i = $\frac{1}{2}$ angulo g; et angulus k = $\frac{1}{2}$ angulo h; et ergo angulus i = angulo k. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Zusatz.

Wenn aber der Winkel g + dem Winkel o, am Centro d, größer ist als der Winkel h am Centro a, so ist auch der Bogen alcp um das Bogenstück cp größer, als der Bogen imf, und folglich auch der Peripheriewinkel i + n, an der Peripherie in b, größer, als der Peripheriewinkel k an der Peripherie in c.

Sechzigster Lehrsatz.

In gleichen Zirkeln acb und dfe formiren die gleichen Bogen agc und dhf gleiche Centriwinkel i und k, und weil diese Centriwinkel i und k gleich sind, so sind auch die Peripheriewinkel l und m einander gleich, denn sie stehen auf gleichen Bogen agc und dhf von zwey gleich großen Zirkeln bagc und edhf.

Beweis.

Der Radius na ist = dem Radio nc, und der Radius od ist = dem Radio of, der Radius T. XVII. Fig. 85 et 86.

 an

an ist = dem Radio do, ergo ist der Radius cn = dem Radio fo. Welches das erste war.

Die Chorde ac ist = der Chorde df, und der Bogen agc ist = dem Bogen dhf, ac = df, an = do, nc = of. Ergo triangulum anc = triangulo dof, et ergo angulus i ad centrum n = angulo k ad centrum o. Welches das zweyte war.

ac = df, ab = de, et bc = ef, ergo triangulum abc = triangulo def; et ergo angulus l ad Peripheriam in b = angulo m ad Peripheriam in e. Welches das dritte und zu beweisen war.

Anmerkung.

Es ist dieser Lehrsatz nichts anders, als das Inversum vom vorhergehenden neun und funfzigsten Lehrsatze, denn allhier schließt man von den Bogen auf die Winkel, und in vorhergehenden Lehrsätzen von den Winkeln auf die Bogen, folglich sind selbige leicht zu fassen.

Ein und sechzigster Lehrsatz.

Ein jeder Winkel a, so an der Peripherie in b in einem halben Zirkel cbd liegt, und dessen beyde Latera bc und bd auf dem Diameter cd des Zirkels cbde aufstehen, ist ein rechter Winkel, denn er hat die halbe Peripherie cbd des ganzen Zirkels cbde zu seinem Maaße.

Beweis.

Angulus f + angulo g = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln = der geraden Linie; siehe den 44sten Lehrsatz Fig. 61. Da nun im 56sten, 57sten, 58sten, 59sten und 60sten Lehrsatze, Fig. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85 et 86. sattsam klar und deutlich bewiesen worden, daß der Winkel am Centro doppelt so groß sey, als der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf gleichen Bogen steht; so ist auch klar, daß der Diameter cd doppelt so viel Grade haben muß, als der Peripheriewinkel a. Denn der geraden Linie ihr Maaß sind die Winkel f + g, sammt dem Bogen oder halben Zirkel cde. Da nun der Winkel a an der Peripherie in b, des halben Zirkels cbd, aufstehet, so ist klar, daß er ein rechter Winkel seyn muß, denn er enthält nur halb so viel Grade in sich, als der Diameter cd, weil er just den halben Zirkel oder Bogen ced zu seinem Maaße hat. Welches zu beweisen war. T. XVIII. Fig. 87.

Erster Zusatz.

Also kann man in jedem halben Zirkel rechte Winkel construiren.

Zweyter Zusatz.

Folglich kann man alle triangula rectangula in einen halben Zirkel bringen, oder auch um ein

ein triangulum rectangulum einen halben Zirkel beschreiben.

Dritter Zusatz.

Also kann man auch an das Ende einer geraden Linie ganz leicht Perpendikularlinien errichten.

Zwey und sechzigster Lehrsatz.

Wenn ein Quadrangulum rectilineum a b c d mit seinen vier Winkeln n + o, k + i, m + l, und g + h an der Peripherie a f d r c q b p eines Zirkels anliegt, so sind die einander entgegengesetzten Winkel n + o, und l + m, wie auch die Winkel g + h, und i + k, zweyen rechten Winkeln gleich.

Anmerkung.

T. XVIII. Fig. 88. Will man die Wahrheit dieses Lehrsatzes mechanisch beweisen, so darf man nur die einander entgegengesetzten Winkel durch den Transporteur messen, so wird man dessen aufs genaueste überzeugt werden. Man messe demnach erstens den Winkel h + g, so wird man finden, daß er 96½ Grad groß ist, und also 6½ Grad größer als ein rechter Winkel sey. Nun messe man den Winkel k + i, welcher dem Winkel g + h entgegengesetzt ist, dieser beträgt 83½ Grad, dazu addire man die vom Winkel g + h übriggebliebenen 6½ Grad, so sind beyde Winkel g + h und i + k per additionem 180 Grad. Mit den Winkeln l + m und n + o verfahre man gleich also, so wird man finden,

den, daß das Quadrangulum abcd 360 Grade oder vier rechte Winkel in sich begreift. Welches also kurz mechanisch zu beweisen war.

Mathematischer Beweis.

Der Bogen drc ist das Maaß des Winkels o und des Winkels g; ergo angulus o = angulo g; denn sie sind beyde Peripheriewinkel, und haben einen gemeinschaftlichen Bogen drc, worauf sie stehen, zu ihrem Maaße, siehe die schon öfters erwähnten Lehrsätze von 56 u. s. w. Der Bogen afd ist das Maaß des Winkels h und des Winkels m, denn sie haben beyde einen gemeinschaftlichen Bogen afd zu ihrem Maaße, worauf sie stehen. Der Bogen apb ist das Maaß des Winkels l und des Winkels k; ergo ist der Winkel k = dem Winkel l, weil sie wiederum beyde einen gemeinschaftlichen Bogen apb zu ihrem Maaße haben. So ist auch letztens der Bogen bqc das Maaß des Winkels n und des Winkels i. Da nun beyde den gemeinschaftlichen Bogen pqc zu ihrem Maaße haben, so ist auch der Winkel n = dem Winkel i. Welches das erste war. T. XVIII. Fig. 88.

Angulus m + angulo o = angulo i + angulo k; angulus m + angulo i + angulo k + angulo o = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln, siehe den ersten Band Regul. Geometr.; denn die drey Winkel eines Triangels halten allezeit zusammengenommen 180 Grad oder zwey

rechte

rechte Winkel; derohalben ist auch der Winkel l + dem Winkel n + dem Winkel g + dem Winkel h = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln, und folglich ist auch der Winkel h + dem Winkel k + dem Winkel n + dem Winkel o = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln. Welches das zweyte war.

Ergo sind auch die Winkel g + h + n + l = den Winkeln m + i + k + o, und dahero folget auch, daß die Winkel h + n + o + k = den Winkeln i + m + l + g = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln. Welches das dritte war.

Daher sind auch schlüßlich alle vier Winkel, als die Winkel o + n, g + h, l + m, i + k, in einem jedweden regulären oder irregulären Viereck abcd, es sey in einen Zirkel eingeschlossen oder nicht, = 360 Grad = vier rechten Winkeln, = dem Maaße eines ganzen Zirkels. Welches das vierte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also hat jedwedes reguläres oder irreguläres geradlinigtes Viereck 360 Grad oder vier rechte Winkel zu seinem Maaße; da nun jedwedes Quadrangulum rectilineum durch eine Diagonallinie in zwey Triangel zertheilet wird, so folget auch, daß die drey Winkel eines jeden geradlinigten Dreyecks 180 Grad oder zwey rechte Winkel zu ihrem Maaße haben.

Zweyter

Zweyter Zusatz.

Derohalben hat jedes Quadrangulum noch einmal so viel Grade zu seinem Maaße, als ein Dreyeck.

Dritter Zusatz.

Also hat ein Dreyeck halb so viel Grade in seinen dreyen geradlinigten Winkeln, als ein Quadrangulum rectilineum.

Vierter Zusatz.

Daraus folget, daß ein Quadratum rectilineum noch einmal so groß am Flächeninhalte sey, als ein geradlinigtes Dreyeck, welches mit dem Quadrangulo gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Fünfter Zusatz.

Hieraus folget ferner, daß ein triangulum rectilineum accurat halb so viel Flächeninhalt in sich begreift, als ein Quadrangulum rectilineum, so mit dem Triangel gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Sechster Zusatz.

Also ist es klar, daß ein jedes Quadratum perfectum, Oblongum rectangulum, Rhombus und Rhomboides durch die Diagonallinie accurat

accurat in die Hälfte, und folglich in zwey gleich große und ähnliche Triangel zertheilet wird.

Drey und sechzigster Lehrsatz.

Der Winkel c, welcher von einer Tangente ba und einer Chorde da entsteht, hat die Hälfte ae des Bogens aed der Chorde ad zu seinem Maaße.

Beweis.

T. XVIII. Fig. 89. Angulus i = 90 Grad = einem rechten Winkel; denn ke, als der Radius, stehet auf der Chorde ad als eine Sagitta oder Pfeillinie perpendikulär, und theilet sowohl die Chorde ad, als auch derselben Bogen aed, in zwey gleiche Theile; ergo ist der Winkel c + dem Winkel g = dem Winkel h + dem Winkel g; et ergo ist der Winkel c = dem Winkel h, denn der Winkel i ist ein rechter Winkel und sich selbsten gleich; ergo ist auch der Winkel g + dem Winkel h = 90 Grad = dem rechten Winkel i. Angulus g + c = 90 Grad = dem rechten Winkel = dem Winkel i; angulus g = g; ergo angulus c = angulo h. Welches das erste war.

Der Bogen ae ist das Maaß des Winkels h, denn der Winkel h stehet am Centro k; folglich ist der ganze Bogen ae, worauf er stehet, das Maaß des Winkels h; ergo ist auch der Bogen ae das Maaß des Winkels c. Welches das zweyte war.

ak =

ak = ab; ergo arcus ae = arcui meb, denn der Bogen mk ist = dem Bogen eb; der Bogen em ist sich selbsten gleich, und wenn man gleiches zu gleichem addiret, so sind die Summen gleich; ergo arcus kme = arcui meb; et ergo angulus c = angulo h. Welches das dritte und zu beweisen war.

Vier und sechzigster Lehrsatz.

Die Tangente ab und Secante cd machen an dem Berührungspunkte d Winkel e und f, die den Winkeln g und h des daran stoßenden Abschnitts dq und dr gleich sind.

Anmerkung.

Dieser Satz wird nach zweyerley Fällen, und also auch auf zweyerley Art, und durch zweyerley Figuren, folgendergestalt bewiesen, als:

Erstens, wenn die Secante cd durchs Centrum i des Zirkels cqdr gehet.

Erster Beweis.

Wenn die Secante cd durchs Centrum i gehet, und also perpendikulär auf der Tangente ab in d des Zirkels dqrc antrifft. Der Winkel k + dem Winkel l ist = dem Winkel h + dem Winkel m = 90 Grad = einem rechten Winkel; denn k + l ist ein Peripheriewinkel, und hat den halben Bogen cqd des ganzen Zirkels cqdr zu seinem Maaße. Folglich stehen auch T. XVIII. Fig. 90.

seine Schenkel c r und d r auf dieses Zirkels Diameter c d; angulus k + angulo l = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo angulus h + angulo m = 90 Grad = einem rechten Winkel; angulus m + angulo f = 90 Grad = einem rechten Winkel. Weil die Secante c d durchs Centrum i gehet, so stehet sie perpendikulär auf der Tangente a b; et ergo angulus f = angulo h. Welches das erste war.

Angulus o + angulo p = 90 Grad = einem rechten Winkel; angulus p + angulo o ist ein Peripheriewinkel, und steht mit seinen Schenkeln d q und q c auf dem Diameter d c des Zirkels c r d q; ergo angulus n + angulo g = 90 Grad = einem rechten Winkel; angulus n + angulo e = 90 Grad = einem rechten Winkel; denn c d gehet durchs Centrum i, und stehet also auf der Tangente a b senkrecht.

Angulus n + angulo e = 90 Grad = einem rechten Winkel; angulus n = n; denn jede Grösse ist sich selbsten gleich; ergo angulus e = angulo g. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Zweyter Beweis.

Wenn die auf der berührenden Linie a b stehende Secante d c nicht durchs Centrum e gehet.

Beweis.

Beweis.

Angulus f = dem halben Bogen c g h d, denn er ist ein Peripheriewinkel, welcher von der Chorde c d durch die Tangente a b am Zirkel c g h d l im Berührungspunkte c formiret wird. Siehe den drey und sechzigsten Lehrsatz Fig. 89. Angulus k + angulo i = angulo f, denn der halbe Bogen c g h d ist gleichfalls dieses Winkels k + i sein Maaß, weil selbiger ein Peripheriewinkel, und im Zirkel c g d h l an der Peripherie in l aufstehet, und also der halbe Bogen c g h d dieses Peripheriewinkels c l d Maaß ist. Welches das erste war. T. XVIII. Fig. 91.

Ergo ist der Winkel m = dem Winkel n, denn die Hälfte des Bogens d l c ist sowohl des Winkels n als des Winkels m sein Maaß. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Fünf und sechzigster Lehrsatz.

Wenn ein Winkel b a c auf einem größern Bogen b d f g e c als einem halben Zirkel d f g e aufstehet, so ist er ein stumpfer Winkel, denn der halbe Bogen, worauf er stehet, ist grösser als ein Quadrant; stehet aber ein Winkel f a g auf einem kleinern Bogen f g, als der halbe Zirkel d f g e, so ist er ein spitziger Winkel, weil nur der halbe Bogen des Bogens f g, welcher viel kleiner als ein Quadrant, sein Maaß ist. Man sehe hiervon den vorhergehenden Tab. XIX. Fig. 92.

vier und sechzigsten Lehrsatz, als woraus dieses Theorema schon deutlich und klar zur Gnüge bewiesen worden ist.

Sechs und sechzigster Lehrsatz.

T. XIX. Fig. 93. Wenn ein Winkel d mit seinen Schenkeln fa und ga außer der Peripherie eines Zirkels bfhgc stehet, so hat der Winkel d gegen den im Zirkel bfhgc stehenden Peripheriewinkel e den Unterschied der beyden halben Bogen fhg und bc zu seinem Maaße, das ist: wie sich verhält der Bogen fhg zum Bogen bc, so verhält sich auch der Winkel e zum Winkel d. Welches zu beweisen war.

Anmerkung.

Ohngeachtet ich gerne bey allen Lehrsätzen den mathematischen Beweisen mechanische vorgesetzt hätte, so ist es doch bey verschiedenen von diesen letztern nicht möglich gewesen, selbige mechanisch zu demonstriren, weil alles hauptsächlich nur die Winkel und deren Proportion angegangen, und man also, um diese mechanisch zu untersuchen, nicht besser thun kann, als wenn man diese Winkel mit einem accuraten Transporteur nachmisset, oder aber durch einige aus den Spitzen der Winkel gezogene Bogen die Winkel gegen einander abmisset, und ihre Proportion, item Größe oder Spannung, durch die Gleichheit der Bogen oder durch die Anzahl der Grade erforschet.

Fünfter

Fünfter Abschnitt.
Von den Flächen oder Figuren.

Erstens von den Dreyecken.

A. Demonstrationes oder Beweise der gleichen Triangel.

Anmerkung.

Es wird einem jeden vermuthlich, laut dem fünften Abschnitte des ersten Bandes aus der 167. Erklärung und 161. 162. Figur bekannt seyn, was gleiche Figuren vor Eigenschaften an sich haben sollen. Die Eigenschaften derselben können zweyerley seyn, als erstens: können gleiche Figuren am Quadrat- oder Flächeninhalte einander gleich seyn, wenn die gleichnamigen Linien und Winkel einander gleich sind. Zweytens können aber auch Figuren oder Flächen einerley oder einen gleichgroßen Quadratraum in ihrem Perimeter einschließen, ohne daß die Figuren von gleichen Linien oder gleichen Winkeln construiret, oder einander ähnlich seyn; denn man kann zum Exempel einen gleichschenklichten und einen gleichseitigen Triangel von gleichem Flächeninhalte haben, ohne daß die Seiten und die Winkel, welche von den Seiten eingeschlossen werden, in beyden Figuren einander gleich sind.

Wir wollen also anjetzt zuerst diejenigen gleichen Dreyecke betrachten, welche von gleichnamigen gleich-

langen Seiten und von gleichnamigen gleichgroßen Winkeln eingeschlossen werden.

Sieben und sechzigster Lehrsatz.

Wenn in zweyen Triangeln abc und def die respektiven Seiten ac, df. ab, de. bc, ef. gleich sind, so sind die ganzen Triangel abc und def einander gleich, siehe den ersten Band Regul. Geometr.

1. Mechanischer Beweis.

T. XIX. Fig. 94. Wenn man zwey Triangel acb und def von gleichlangen Seiten ac, ab, cb No. I. und df, de, ef No. II. hat, und will mechanisch beweisen, daß selbige auch wirklich in allen Stücken einander gleich sind, so messe man erstens die gleichnamigen gleichlangen Seiten mit dem Zirkel gegen einander, als: ac mit df, cb mit fe, und ba mit ed, sodann messe man die gleichnamigen Winkel durch den Transporteur oder durch Zirkelbogen und ihre Chorden, so wie in der Hauptanmerkung über die Demonstration Fig. X. gezeiget worden, als nämlich den Winkel g gegen den Winkel h, den Winkel i gegen den Winkel k, und letztens den Winkel l gegen den Winkel m, so wird man finden, daß, wenn die gleichnamigen Seiten in beyden Triangeln abc und def einander gleich sind, auch die gleichnamigen Winkel in beyden Triangeln einerley Oeffnung, oder Spannung, oder Anzahl Grade haben werden,

woraus also gewiß zu schließen, daß beyde Triangel a b c und d e f sowohl in Linien als Winkeln einander vollkommen gleich sind. Welches mechanisch zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Die Basis a c ist = der Basi d f, die Seite cb ist = der Seite f e, und die Seite a b ist = der Seite d e per constructionem; ergo deckt der Winkel g den Winkel h, der Winkel i deckt den Winkel k; ergo deckt auch der Winkel l den Winkel m, siehe Regul. Geometr. 33.; ergo triangulum a b c = triangulo d e f. Welches zu beweisen war. T. XIX. Fig. 94.

Acht und sechzigster Lehrsatz.

Wenn in zweyen Triangeln a b c und d e f die zwey Seiten a c und c b mit d f und f e einander gleich sind, und die dadurch an den Scheitelpunkten c und f entstandenen Winkel g und h gleich sind, so sind beyde Triangel a c b, I. und d f e, II. einander gleich.

I. Mechanischer Beweis.

Man wollte zum Exempel dem gegebenen Triangel a c b einen gleichgroßen Triangel d f e mechanisch construiren, und hätte sodann in dieser Absicht schon die Basis d e der Basi a b und die Seite d f der Seite a c gleichlang construiret, T. XIX. Fig. 95.

langen Seiten und von gleichnamigen gleichgroßen Winkeln eingeschlossen werden.

Sieben und sechzigster Lehrsatz.

Wenn in zweyen Triangeln abc und def die respektiven Seiten ac, df. ab, de. bc, ef. gleich sind, so sind die ganzen Triangel abc und def einander gleich, siehe den ersten Band Regul. Geometr.

1. Mechanischer Beweis.

T. XIX. Fig. 94. Wenn man zwey Triangel acb und def von gleichlangen Seiten ac, ab, cb No. I. und df, de, ef No. II. hat, und will mechanisch beweisen, daß selbige auch wirklich in allen Stücken einander gleich sind, so messe man erstens die gleichnamigen gleichlangen Seiten mit dem Zirkel gegen einander, als: ac mit df, cb mit fe, und ba mit ed, sodann messe man die gleichnamigen Winkel durch den Transporteur oder durch Zirkelbogen und ihre Chorden, so wie in der Hauptanmerkung über die Demonstration Fig. X. gezeiget worden, als nämlich den Winkel g gegen den Winkel h, den Winkel i gegen den Winkel k, und letztens den Winkel l gegen den Winkel m, so wird man finden, daß, wenn die gleichnamigen Seiten in beyden Triangeln abc und def einander gleich sind, auch die gleichnamigen Winkel in beyden Triangeln einerley Oeffnung, oder Spannung, oder Anzahl Grade haben werden,

woraus

woraus also gewiß zu schließen, daß beyde Triangel abc und def sowohl in Linien als Winkeln einander vollkommen gleich sind. Welches mechanisch zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Die Basis ac ist = der Basi df, die Seite cb ist = der Seite fe, und die Seite ab ist = der Seite de per constructionem; ergo deckt der Winkel g den Winkel h, der Winkel i deckt den Winkel k; ergo deckt auch der Winkel l den Winkel m, siehe Regul. Geometr. 33.; ergo triangulum abc = triangulo def. Welches zu beweisen war. T. XIX. Fig. 94.

Acht und sechzigster Lehrsatz.

Wenn in zweyen Triangeln abc und def die zwey Seiten ac und cb mit df und fe einander gleich sind, und die dadurch an den Scheitelpunkten c und f entstandenen Winkel g und h gleich sind, so sind beyde Triangel acb, I. und dfe, II. einander gleich.

1. Mechanischer Beweis.

Man wollte zum Exempel dem gegebenen Triangel acb einen gleichgroßen Triangel dfe mechanisch construiren, und hätte sodann in dieser Absicht schon die Basis de der Basi ab und die Seite df der Seite ac gleichlang construiret, T. XIX. Fig. 95.

wie auch den Winkel edf nach dem Winkel bac durch den Transporteur aufgesetzt, die Seite fe aber wollte man gewisser Ursachen wegen etwas länger oder kürzer als cb machen, so wird dieses nicht angehen; denn, nimmt man fl länger als cb, so müßte man auch die Grundlinie de nach l wie el in etwas verlängern, dadurch würde also der Winkel h erstens um den Winkel m größer als der Winkel g; zweytens würde die Grundlinie dl um das Stück el größer als die Basis ab des Dreyecks acb; folglich würde dadurch drittens der Triangel dfl um das Dreyeck efl größer, als der gegebene Triangel acb. Welches das erste war.

Wollte man aber die Seite fi kürzer annehmen, als die Seite cb des gegebenen Dreyecks acb, so würde solche wiederum nicht aus dem Scheitelpunkte f in den Endpunkt e der Basis de eintreffen, sondern vermöge ihrer Kürze weiter nach d einrücken. Dadurch würde also erstens die Basis de um das Stück ie kleiner, als die gegebene Grundlinie ab des Triangels acb; und zweytens der Scheitelwinkel l um den Winkel k kleiner werden, als der wahre Scheitelwinkel h oder sein gleicher g des Dreyecks acb, und folglich würde dadurch drittens das Dreyeck dfi um den kleinen Triangel ife kleiner als das gegebene Dreyeck acb werden. Welches das zweyte und mechanisch zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

ac = df; angulus g = angulo h; cb = fe per constructionem; ergo deckt die Seite ac die Seite df; der Winkel g deckt den Winkel h, und der Schenkel cb deckt den Schenkel fe; ergo deckt der Winkel g den Winkel h; et ergo ac = df, et cb = fe. Welches das erste war. T. XIX. Fig. 95.

Angulus g = angulo l + angulo k; angulus g = angulo h minus angulo m; et ergo ist der Triangel acb = dem Triangel dfe, und weil das Dreyeck acb dem Dreyeck dfe gleich ist, so decken sie einander. Denn wenn zwey Größen einander vollkommen gleich sind, so decken sie einander. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Anmerkung.

Würde sich aber fe weiter nach l ausdehnen, oder nach i einrücken, so würde nach dem ersten Falle der Winkel h sich um den Winkel m weiter öffnen, und also die Basis de um das Stück el verlängern; folglich wäre das Dreyeck dfe um das Dreyeck efl größer, als der gegebene Triangel acb; rückte hingegen die Linie oder Seite fe hineinwärts in den Triangel nach i, so würde dadurch der Winkel h um den Winkel k kleiner als der Winkel g; folglich auch die Basis de um die Linie oder das Stückchen ie kürzer, als die Basis ab des gegebenen Triangels acb; und da also nach dem ersten Falle der Winkel h um den Winkel m größer ais der Winkel g, und nach dem zweyten Falle der Winkel h um den Winkel k kleiner als der Winkel

g bloß durch die Verlängerung oder Verkürzung der Seite fe würde, so müssen alle drey gleichnamige Seiten in zwey Triangeln, wenn sie einander vollkommen gleich seyn sollen, gleich seyn.

Neun und sechzigster Lehrsatz.

Wenn in zweyen Dreyecken abc, I. und def, II. die Basis ab mit der Basi de gleichlang ist, und die darauf stehenden gleichnamigen beyden Winkel i und g den Winkeln k und h gleichgroß sind, so sind die ganzen Triangel acb und dfe einander gleich.

1. Mechanischer Beweis.

T. XIX. Fig. 96. Es sey zum Exempel die gerade Linie ab des Dreyecks acb nebst den auf dieser Basi stehenden Winkeln i und g gegeben, nach welchen dreyen Datis man einen gleichgroßen Triangel dfe construiren soll: so ziehe man zuerst eine gerade Linie de = der gegebenen ab, setze in d den Winkel k = dem Winkel i, und in e den Winkel h = dem Winkel g auf, so geben sich von selbsten, vermöge dieser Winkel k und h, die Seiten df und fe = den Seiten ac und cb.

Versiehet man es aber, und macht den Winkel h um einige Grade zu groß, wie zum Exempel der Winkel h + dem Winkel o, so bekömmt man statt der Seite ef die gerade Linie en, welche viel größer als die gegebene bc, und wird also das Dreyeck dne um das Dreyeck fne grösser,

ser, als der gegebene Triangel acb. Welches das erste war.

Machet man aber den Winkel h um einige Grade zu klein, daß also der Winkel g um den Winkel m größer ist als der Winkel h, so bekömmt man statt der Seite ef die Linie el, und wird dadurch der Triangel dle um den Triangel lef und um den Winkel m kleiner, als der gegebene Triangel acb. Welches das zweyte war.

Ergo müssen in zweyen dergleichen Triangeln acb und dfe, wenn sie einander ganz vollkommen gleich seyn sollen, gleichlange Bases ab und de, nebst auf selbigen stehenden gleichnamigen großen Winkeln i, g. k, h. seyn. Welches das dritte und mechanisch zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Basis ab = Basi de, der Winkel k ist = und deckt den Winkel i, der Winkel h ist = und deckt den Winkel g; ergo ist df = ac, et ef = bc, per hypothesin; ergo triangulum acb ≗ triangulo def. Welches zu beweisen war. T. XIX. Fig. 96.

Anmerkung.

Würde aber der Winkel h um den Winkel o größer oder um den Winkel m kleiner als der Winkel g, so würde sich nach dem ersten Falle die Seite df des Dreyecks dfe um das Stück fn verlängern oder ausdehnen müssen, wenn das Latus en den Triangel dne schließen sollte, folglich würde der Triangel dne um

das Dreyeck fen größer, als der Triangel dfe oder sein gleicher acb. Nach dem zweyten Falle aber würde die Seite df durch die Linie el, wegen des Winkels m, um das Stück lf verkürzet, und also der Triangel dle um das Dreyeck lef kleiner als der Triangel dfe oder sein gleicher acb werden.

Siebenzigster Lehrsatz.

Wenn in zweyen rechtwinklichten Triangeln bac und edf die Basis ab und Höhe ac, welche den rechten Winkel von 90 Graden einschliessen, der Basi ed und Höhe df sammt dem Winkel von 90 Graden gleich sind, so sind die ganzen Triangel einander gleich.

1. Mechanischer Beweis.

T. XIX. Fig. 97. Man ziehe eine gerade Linie de = der gegebenen Basi ab, und errichte auf selbiger die Perpendikulare df = der Perpendikulare ac, so erhellet aus vorhergehendem 67sten, 68sten und 69sten Lehrsatze Fig. 94, 95 et 96, daß beyde Triangel einander gleich werden müssen.

Machet man nun diese Perpendikulare df um den Theil fp länger als ac, so wird dadurch der Winkel h um den Winkel q größer, als er werden soll, nämlich als der Winkel g, folglich wird das Dreyeck dpe um das Dreyeck fep größer als der Triangel dfe oder sein gleicher acb. Welches das erste war.

Machet

Machet man aber diese Perpendikulärlinie dn um den Theil nf kleiner, als die gegebene Perpendikulare ac, so wird dadurch der Winkel h um den Winkel o kleiner als der Winkel g des Triangels acb, wodurch das Dreyeck dne um den Triangel fen kleiner wird, als der Triangel fed oder sein gleicher acb. Welches das zweyte und mechanisch zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Basis ab = Basi de; angulus cab = angulo dfe = 90 Grad = einem rechten Winkel; ac = df per constructionem; ergo cb = fe. Welches das erste war. T. XIX. Fig. 97.

Die Basis ab decket die Basis de; die Perpendikulare ac deckt die Perpendikulare df; ergo deckt auch die Hypothenuse cb die Hypothenuse fe. Welches das zweyte war.

Der Winkel g deckt den Winkel h, der Winkel l deckt den Winkel m; ergo deckt der Triangel acb das Dreyeck dfe. Welches das dritte und zu beweisen war.

Anmerkung.

Der Lehrsatz sagt, daß, wenn in zweyen rechtwinklichten Triangeln acb und dfe die Bases oder Grundlinien ab und de von gleicher Länge, und die Catheten ac und df von gleicher Höhe, daß alsdenn auch beyde rechtwinklichte Triangel acb und dfe in allen Stücken vollkommen gleich seyn werden.

Wollte

Wollte man also zum Exempel die Cathete df um etwas weniges verlängern oder verkürzen, wie fp oder fn, so würde nach dem ersten Falle nicht allein der Winkel q dem Winkel h zugesetzt, sondern auch die Hypothenuse ep länger als die Hypothenuse bc werden.

Nach dem andern Falle aber würde nicht allein der Winkel h um den Winkel o kleiner als der Winkel g, sondern die neue Hypothenuse en auch kürzer als die wahre Hypothenuse ef oder ihre gleiche bc werden, sondern der Scheitelpunkt f des Winkels m würde sich ganz und gar verrücken, und nach dem ersten Falle, wenn der Winkel h größer wird, kleiner werden; nach dem zweyten Falle aber, wenn der Winkel h kleiner wird, sodann größer werden, als der Winkel l des gegebenen Dreyecks acb.

Ein und siebenzigster Lehrsatz.

Wenn in den rechtwinklichten Dreyecken bac und edf, die Basis ab mit der Grundlinie de, und die Hypothenuse bc mit der Hypothenuse ef, welche die spitzigen Winkel g und h einschließen, gleich sind, so ist auch die übrige dritte Seite oder Cathete ac der Cathete de, df, der Winkel i dem Winkel k, und das ganze Triangulum acb dem Triangulo dfe in Seiten und Winkeln vollkommen selbsten gleich.

Anmerkung.

Der mechanische Beweis dieser Figuren gründet sich in allem auf das, was im 70sten Lehrsatze Fig. 97. No. II. in Ansehung der verlängerten oder verkürzten

Cathete

Cathete df gesagt worden, nach welcher man also auch diese Figuren mechanisch examiniren kann.

Mathematischer Beweis.

Weil die Basis ab = der Basi de, der spitzige Winkel g = dem spitzigen Winkel h, und die Hypothenuse bc = der Hypothenuse ef, so ist nothwendiger Weise die Cathete ac = der Cathete df, und also auch der obere spitzige Winkel i = dem spitzigen Winkel k; ergo ist das rechtwinklichte Dreyeck abc in allem vollkommen gleich dem rechtwinklichten Dreyeck def; und weil sie einander in allem gleich sind, so deckt auch das Dreyeck acb den Triangel dfe, und der Triangel dfe den Triangel acb; siehe hiervon den ersten Band Regul. Geometr. 33. Welches zu beweisen war. T. XIX. Fig. 98.

Zwey und siebenzigster Lehrsatz.

Wenn in zweyen rechtwinklichten Dreyecken bca und efd die Catheten cb und fe, wie auch die Hypothenusen ba und ed, gleich sind, und die dazwischen liegenden spitzigen Winkel g und h einerley Spannung oder Oeffnung haben, so sind die beyden Dreyecke abc und def einander vollkommen gleich.

Anmerkung.

Der mechanische Beweis dieser Figur gründet sich in allem auf den mechanischen Beweis des 68sten Lehrsatzes

satzes Fig. 95. No. II. in Ansehung der Ausdehnung oder Verkürzung der daselbst befindlichen Basis d e nach l oder i.

Mathematischer Beweis.

T. XIX. Fig. 99. Die Cathete c b des Triangels c b a ist = der Cathete f e des Dreyecks f e d; der Winkel g ist = und deckt den Winkel h; und die Hypothenuse b a ist = und deckt die Hypothenuse e d; ergo ist auch die Grundlinie c a gleich der Basi f d; und folglich auch der auf der Basi c a befindliche Winkel i = dem auf der Basi f d stehenden Winkel k.

Ergo ist der Triangel a c b = dem Triangel d f e; et ergo weil beyde Triangel in Seiten und Winkeln einander vollkommen gleich sind, so deckt auch der Triangel a c b den Triangel d f e, und hinwiederum der Triangel d f e den Triangel a c b. Welches mathematisch zu beweisen war.

Drey und siebenzigster Lehrsatz.

Wenn in zweyen Dreyecken a b c und d e f die Basis a b mit der Basi d e von gleicher Länge, und die Höhe g c des Dreyecks a c b der Höhe h f des Triangels d f e gleich ist, so sind beyde Triangel a c b und d f e einander in allem ganz vollkommen gleich.

1. Mechanischer Beweis.

Man messe erstens alle drey Seiten ab, bc und ca des Triangels acb gegen die drey Seiten de, ef und fd des Triangels dfe, sodann messe man die Linie ag gegen die Linie dh, so muß die Linie gb des Triangels No. I. mit der Linie he des Triangels No. II. accurat gleich seyn und zutreffen. T. XIX. Fig. 100.

Wenn dieses ist, so messe man die Perpendikulärlinie gc des Triangels acb gegen die Höhe hf des Triangels dfe, ziehe ferner aus g und h in beyden Triangeln gleichgroße Zirkelbogen lm und no; vergleiche deren Chorden gegen einander, so werden diese nicht allein einander gleich seyn, sondern auch sowohl der Zirkelbogen lm, als auch der Zirkelbogen no, einen Viertelzirkel betragen; folglich hält auch der Winkel cgb des Triangels acb, so wie der Winkel fhe des Dreyecks dfe, ein jeder 90 Grad; ergo ist der Triangel agc gleich dem Triangel dhf, und der Triangel bgc gleich dem Triangel ehf; ergo ist auch der Triangel acb in allem gleich dem Triangel dfe, und da beyde Triangel einander vollkommen gleich sind, so deckt auch der Triangel acb den Triangel dfe. Welches mechanisch zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

T. XIX. Fig. 100. Die Basis ab ist = der Basi de, ag = dh, gb = he, gc = hf = perpendiculari; ergo angulus i = angulo k = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo hypothenusa ac = hypothenusae df; et ergo triangulum rectangulum agc = triangulo rectangulo dhf. Welches das erste war.

he = gb, hf = gc = perpendiculari; ergo angulus bgc = angulo ehf = 90 Grad = einem rechten Winkel, und weil cg sowohl als fh von gleicher Länge sind, und senkrecht auf gb und he aufstehen, so ist auch die Hypothenuse cb = der Hypothenuse fe; ergo triangulum rectangulum gbc = triangulo rectangulo hef. Welches das zweyte war.

Et ergo triangulum agc + triangulo cgb = triangulo dhf + triangulo fhe; denn wenn man gleiches zu gleichem addiret, so sind die Summen gleich, siehe Regul. Arithm. 11.; und weil beyde Triangel agc und cgb beyden Triangeln dhf und fhe einander vollkommen gleich sind, so deckt auch der große Triangel acb den großen Triangel dfe, und hingegen deckt auch wiederum der Triangel def den Triangel abc. Welches das dritte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Wo alle gleichnamige Winkel und Linien in zweyen Triangeln einander decken, da sind auch die ganzen Triangel einander gleich.

Zweyter Zusatz.

Wenn man also einige ungewisse Weiten messen will, so geschieht dieses am besten durch Formirung eines Trigoni.

Dritter Zusatz.

Alle Triangel, so gleichlange Bases und gleiche Höhen haben, oder zwischen zwo geraden Parallellinien stehen, sind einander gleich.

Vierter Zusatz.

Es ist also leicht, allerley Arten Triangel in andere zu verwandeln, und folglich auch eine fast unendliche Anzahl gleicher Triangel zu construiren.

Fünfter Zusatz.

Also sind auch, laut dem ersten Bande Regul. Geometr. 56., alle Triangel, sie mögen recht, spitzig oder stumpfwinklicht seyn, halb so groß, als ihre Parallelogramma oder Rhomboides, so mit ihnen gleiche Grundlinien haben, und von gleicher Höhe sind.

Vier und siebenzigster Lehrsatz.

Die Triangel abc und def, so gleiche Grundlinien ab und de haben, und deren Höhe gc und bf gleich ist, und in welchen die Seiten ac mit df, und bc mit ef parallel gehen, die liegen zwischen zweyen mit einander gleichlaufenden geraden Linien ge und ci, und die Seite cb wird auch mit der Seite fe von gleicher Länge seyn.

Beweis.

T. XXI. Fig. 101. Die Perpendikulare gc ist = der Perpendikulare bf, ga = bd; ergo ist ac = df, und die gerade Linie ci mit der Grundlinie ge parallel. Welches das erste war.

ab = de, ac = df; ergo cb = fe; et ergo triangulum acb = triangulo dfe. Welches das zweyte war.

Wenn aber die gerade Linie ci mit der geraden Linie ge nicht gleichlaufend, sondern wie ck oder cl schief gerichtet wäre, so würde nach dem ersten Falle der Triangel dfe um das Dreyeck kfe größer als das Dreyeck acb seyn, nach dem andern Falle aber würde das Dreyeck dfe um den Triangel fel kleiner als der Triangel acb seyn. Welches das dritte war.

Zweytens würde sodann auch die Seite fe mit der Seite cb nicht parallel gehen, sondern

sich

sich nach der Direction der geraden Linien ck oder cl richten; es würde also fe nach dem ersten Falle wie ek über ef zu liegen kommen, und auch länger als ef werden, wodurch sodann der Triangel dke um das Dreyeck fec größer seyn würde, als der Triangel acb. Nach dem zweyten Falle aber würde die Linie fe wie die Linie le unter fe zu liegen kommen, und sodann auch kürzer als ef werden, wodurch folglich der Triangel fde um das Dreyeck fel kleiner werden würde, als der Triangel acb. Welches das vierte war.

Ergo sind alle Triangel acb und dfe, welche zwischen zweyen Parallelen ge und ci liegen, und deren Seiten ac mit df, und bc mit ef gleichlaufend sind, einander vollkommen gleich, und weil sie gleich sind, decken sie einander; also deckt das Dreyeck acb den Triangel dfe, und der Triangel dfe deckt auch hinwiederum den Triangel acb. Welches das fünfte und zu beweisen war.

Zusatz.

Wenn man demnach dem gegebenen Triangel acb einen gleichen ziehen will, ohne den Zirkel darzu zu gebrauchen, so verlängere man erstens die Basis ab des Triangels acb willkührlich nach e, und ziehe mit ae durch den Scheitelpunkt c die Parallele ci, sodann ziehe man aus e mit cb die Parallele ef bis an die gerade mit T. XXI. Fig. 101.

ae parallellaufende Linie ci in f, aus f ziehe man endlich gegen die Basis ae mit ac die Parallele fd, so wird der Triangel fde gleich seyn dem Triangel cab.

Fünf und siebenzigster Lehrsatz.

Alle Triangel acb und adb, so gleiche Bases ab haben, und zwischen zweyen Parallelen ab und ce liegen, sind einander gleich, siehe den sieben und zwanzigsten Lehrsatz Fig. 39.

Beweis.

T. XXI. Fig. 102. Gesetzt, man wollte das große Dreyeck afb für das wahre zwischen den Parallelen ab und cd liegende Dreyeck adb annehmen, oder an dessen Stelle setzen, so würde die Linie cf mit der Parallele ce bey c über dieser Parallele einen Winkel h formiren, welches doch Parallellinien nicht thun können. Welches das erste war.

Nimmt man aber das kleinere Dreyeck agb für den Triangel adb an, so würde die vermeynte Parallele cg unter der wahren Parallele ce einen Winkel i formiren, welches so wenig, als vorher, geschehen kann. Welches das zweyte war.

Also wäre nach dem ersten Falle das Dreyeck afb um das Dreyeck dbf größer, als der wahre dem Triangel acb gleiche Triangel adb. Und nach dem zweyten Falle ist der Triangel

angel a g b um den Triangel g d b kleiner als der wahre dem Triangel a c b gleiche Triangel a d b. Welches das dritte und zu beweisen war.

Anmerkung.

Ob schon diese zwey Triangel a c b und a d b einander am Flächen- oder Quadratinhalte vollkommen gleich sind, das ist, einen gleichen Raum einnehmen, so decken sie einander nicht, weil selbige in ihrem Perimeter nicht gleich große Winkel einschließen, welches auch ohnmöglich ist. Indem selbige auf einer gemeinschaftlichen Basi a b aufstehen, so können ihre Latera ac, c b und a d, d b nicht parallel gegen einander liegen, denn diese Seiten würden einander decken, so wie die Basis des Triangels a c b die Grundlinie des Dreyecks a d b decket.

Sechs und siebenzigster Lehrsatz.

Alle Triangel a c b, a d b und a e b, so auf einer gemeinschaftlichen Basi a b stehen, uud zwischen gleichen Parallelen a b und c e liegen, sind einander gleich.

Beweis.

Das Trapezium a b c e = Trapezio a b c e, denn jede Größe ist sich selbsten gleich. siehe Regul. Arithm. I. Das Dreyeck a c b ist = ½ parallelogrammo a b c d, denn a b = c d, und a c = b d, b c = b c; ergo triangulum a c b = ½ parallelogrammo a c d b. Welches das erste war. T. XXI. Fig. 103.

 a b =

ab = cd, ac = bd, ad = ad; ergo triangulum adb = triangulo acd; et ergo triangulum adb = ½ parallelogrammo abdc. Welches das zweyte war.

ab = de, ad = be, ae = ae; ergo triangulum aeb = triangulo aed; et ergo triangulum abe = ½ parallelogrammo adeb. Welches das dritte war.

ab = ab, cd = de, ac = bd, be = ad; ergo parallelogrammum acdb = parallelogrammo adeb; et ergo triangulum acb = trigono adb = dem Dreyeck aeb. Welches das vierte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also kann man ganz leicht ein Parallelogrammum in zwey gleiche Triangel theilen oder halbiren.

Zweyter Zusatz.

Folglich kann man auch ganz leicht einen Triangel halbiren.

Anmerkung.

Dieses muß ich hierbey noch erinnern, daß nur die Quadrata, Parallelograma, Rhombi und Rhomboides durch die Diagonallinien in zwey gleichgroße Triangel eingetheilt werden. Es theilen zwar auch die Diagonallinien alle Geschlechter der Trapezia in zwey, aber

aber ungleichgroße Theile, weil in den Trapeziis weder die gegenüber liegenden Linien von gleicher Länge, noch die einander entgegengesetzten Winkel von gleicher Größe sind.

B. Demonstrationes der ähnlichen Dreyecke.

Sieben und siebenzigster Lehrsatz.

Wenn in zweyen Dreyecken acb und dfe alle drey respektive gleichnamige Winkel g, p, l und i, r, n einander gleich sind, so sind beyde Dreyecke einander ähnlich.

Beweis.

Der Winkel g ist = dem Winkel i; ergo ist der Bogen bhc ähnlich dem Bogen ekf, denn die Chorde bc verhält sich zum Bogen bhc, wie sich verhält die Chorde ef zum Bogen ekf. Welches das erste war. T. XXI. Fig. 104.

Der Winkel p ist = dem Winkel r; ergo ist der Bogen aqb ähnlich dem Bogen dse, denn die Chorde ab verhält sich zum Bogen aqb, wie sich verhält die Chorde de zum Bogen dse. Welches das zweyte war.

Der Winkel l ist = dem Winkel n; ergo ist der Bogen amc ähnlich dem Bogen dof, denn die Chorde ac verhält sich zum Bogen amc, wie sich verhält die Chorde df zum Bogen dof. Welches das dritte war.

Ergo verhält sich der Triangel abc zum Zirkel amchbq, wie der Triangel def zum Zirkel dofkes, und da alle Zirkel einander ähnlich sind, siehe den ersten Band, 169. Erklärung, Fig. 165. et 166., so ist der Triangel abc ähnlich dem Dreyeck def. Welches das vierte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also kann man sicher von der Gleichheit der Winkel auf die Proportion der Seiten schließen.

Zweyter Zusatz.

Also müssen alle gleichseitige Dreyecke ähnlich seyn, und auch in sich gleiche Winkel haben.

Dritter Zusatz.

Folglich sind alle gleichschenklichte Triangel, so an der Basis gleiche Winkel haben, einander ähnlich.

Acht und siebenzigster Lehrsatz.

Wenn in zweyen Triangeln acb und def zwey Seiten, als allhier die Basis ab mit der Basi de, und die Seite ac mit der Seite df proportionirt sind, und der dazwischen liegende Winkel g dem Winkel h gleich ist, so sind beyde Triangel bac und edf einander ähnlich.

Beweis.

Beweis.

Die Seite aq ist = Dreyviertel ac = df; die Basis ap ist = Dreyviertel ab = de; der Winkel g ist = dem Winkel h; derohalben verhält sich aq zu ap, wie ac zu ab, und wie df zu de. Welches das erste war. T. XXII. Fig. 105.

ac verhält sich zu aq oder df, wie ap zu ab oder de; angulus g = g, denn jede Größe ist sich selbsten gleich, siehe den ersten Band Regul. Geometr. Ergo verhält sich cb zu qp oder fe, wie ap zu ab oder de, und wie ac zu aq oder df; ergo ist der Winkel n = dem Winkel m = dem Winkel o, und der Winkel i = dem Winkel k = dem Winkel l. Welches das zweyte war.

ap = de; angulus g = angulo h, et angulus i = angulo l; ergo aq = df, et qp = fe; et ergo ist auch der Winkel n = dem Winkel o; et ergo ist der Triangel aqp ähnlich dem Triangel acb, und folglich ist auch der Triangel acb ähnlich dem Dreyeck dfe. Welches das dritte und zu beweisen war.

Anmerkung.

Wäre aber aq mit ac nicht proportioniret, sondern statt Dreyviertel ac um q. 4, größer, oder um 3. q, kleiner als aq wirklich ist, so würde der Winkel i nach dem ersten Falle größer, und der Winkel n kleiner werden als er ist; nach dem andern Falle aber

würde

würde der Winkel i kleiner, und der Winkel n größer werden, folglich würde in beyden Fällen der Winkel n nicht dem Winkel m, und der Winkel i nicht dem Winkel k gleich, noch die Seite ac mit aq proportionirt seyn.

Neun und siebenzigster Lehrsatz.

Wenn in zweyen Triangeln abc und def eine Seite ab mit der Basi de proportionirt ist, und die auf diesen proportionirten Grundlinien befindlichen Winkel g und i so groß als die Winkel h und k sind, so sind beyde Dreyecke einander ähnlich.

Beweis.

T. XXII. Fig. 106. Die Basis de des Triangels def ist = Dreyviertel der Grundlinie ab des Dreyecks abc; der Winkel h ist = dem Winkel g, und der Winkel k ist = dem Winkel i per constructionem; ergo verhält sich die Seite ac zur Seite cb im großen Triangel, wie sich verhält die Seite df zur Seite fe im kleinern Triangel; et ergo angulus l = angulo m. Welches das erste war.

ab verhält sich zu ac wie de zu df, und cb verhält sich zu ba wie fe zu ed; item verhält sich ac zu cb wie df zu fe; ergo ist das Dreyeck acb ähnlich dem Dreyeck dfe. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Erster

Erster Zusatz.

Folglich sind auch in einem solchen Triangel die Seiten ac mit cb und die Seiten df mit fe proportionirt. Item ist auch ac mit df und cb mit fe in beyden Dreyecken gegen einander proportionirt, und die beyden obern Winkel l und m sind einander in beyden Dreyecken gleich.

Zweyter Zusatz.

Also kann man aus einer proportionirten Seite und zweyen gegebenen Winkeln ähnliche Dreyecke construiren, und folglich unbekannte Theile eines Dreyecks finden.

Anmerkung.

Da man also, laut diesem zweyten Zusatze, die unbekannten Linien und Winkel eines Dreyecks finden kann, so glaube ich um desto mehr Ursache zu haben, hierbey nochmals zu erinnern, wie ich bereits schon im ersten Bande gethan, daß man die Trigonometrie und derselben große, schwere und viele Rechnung ganz leicht entbehren kann, besonders in der praktischen Geometrie.

Dritter Zusatz.

Also kann man auch auf dem Felde die Weiten und Höhen der unbekannten Oerter in ähnliche Triangel bringen und vermessen.

Achtzigster Lehrsatz.

Wenn in zweyen ähnlichen Dreyecken acb und dfe aus der obern Spitze b des Triangels abc, auf dessen Basis ac ein Perpendikel bg, desgleichen auch aus der obern Spitze e des Dreyecks dfe, auf dessen Grundlinie df eine senkrechte Linie eh gefällt wird, so sind die drey Triangel abc, agb und bgc den drey Dreyecken def, dhe und ehf ähnlich.

Beweis.

T. XXII. Fig. 107. Der Winkel l ist = dem Winkel m, der Winkel p ist = dem Winkel q, und der Winkel i + r ist = dem Winkel k + s; ergo verhält sich ac zu cb wie df zu fe, und wie sich verhält cb zu fe, so verhält sich auch ba zu ed; ergo triangulum acb ∽ triangulo dfe. Welches das erste war.

bg = bg = perpendiculari; ergo angulus n = 90 Grad = einem rechten Winkel. eh = eh = perpendiculari; ergo angulus o = 90 Grad = einem rechten Winkel. ag verhält sich zu gb wie dh zu he; ergo verhält sich auch gb zu ba wie he zu ed; derohalben ist auch der Winkel l = dem Winkel m, und der Winkel i = dem Winkel k. Ergo ist das Dreyeck abg ähnlich dem Dreyeck deh. Welches das zweyte war.

bg = bg = perpendiculari; eh = eh = perpendiculari; ergo angulus bgc = angulo ehf = 90 Grad = einem rechten Winkel. bg verhält

sich

sich zu gc wie eh zu hf; ergo verhält sich auch gb zu bc wie he zu hf; derohalben ist der Winkel r = dem Winkel s, und der Winkel p = dem Winkel q; ergo ist das Dreyeck bgc ∽ dem Dreyeck ehf; et ergo ist der Triangel abg + bgc ∽ dem Dreyeck deh + ehf. Welches das dritte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also sind die Seiten der kleinern Dreyecke dhe und ehf mit den Seiten abg und bgc der größern Triangel gegen einander proportionirt, und die in den proportionirten ähnlichen Dreyecken befindlichen Winkel einander gleich; also ist der Winkel l = dem Winkel m, der Winkel p = dem Winkel q, der Winkel i = dem Winkel k, der Winkel r = dem Winkel s, und der Winkel i + r = dem Winkel k + s.

Zweyter Zusatz.

Also werden durch die Perpendikularlinien bg und eh in ähnlichen proportionirten Triangeln die Grundlinien ac und df in g und h nach Proportion getheilt, und verhalten sich demnach die Theile der größern Grundlinie ac wie die Theile der kleinern Grundlinie, also verhält sich auch ag zu gc, wie dh zu hf, oder auch: wie ag zu dh, also gc zu hf.

Dritter

Dritter Zusatz.

Demnach verhalten sich auch in ähnlichen Dreyecken die Grundlinien ac und df, wie ihre Perpendikulare bg und he; oder auch: wie sich verhält die Basis ac zu ihrer Perpendikulare gb im Triangel acb, also verhält sich auch die Grundlinie df zu ihrer Perpendikulare he im Dreyeck def.

Vierter Zusatz.

Demnach kann man auch ein jedes gegebenes Stück Land in proportionirte Theile theilen, und von einem jeglichen Felde proportionirte Theile abschneiden.

Ein und achtzigster Lehrsatz.

Wenn in zweyen Dreyecken abc und def die Seiten ab mit de, ac mit df, und bc mit ef proportionirt sind, so werden auch derselben Winkel h, l, o, und i, m, p, so von den gegen einander proportionirten Seiten unterspannt sind, einander gleich seyn.

Beweis.

T. XXIII. Fig. 108. Die Diagonallinie de ist = de, denn jede Größe ist sich selbsten gleich. dg = df, eg = ef, angulus i = angulo k, angulus m = angulo n, et angulus p = angulo q; ergo triangulum

lum d f e = et ∽ triangulo d g e. Welches das erste war.

g d oder ihre gleiche f d verhält sich zu d e, wie c a zu a b; g e oder ihre gleiche f e verhält sich zu e d, wie c b zu b a. Angulus o = angulo p = angulo q; angulus h = angulo i = angulo k; et angulus l = angulo m = angulo l; ergo triangulum a c b ∽ triangulo d f e ∽ triangulo d g e. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Zusatz.

Daher haben alle ähnliche Dreyecke auf ihren proportionirten gleichnamigen Seiten auch gleichgroße Winkel.

Zwey und achtzigster Lehrsatz.

Alle rechtwinklichte Triangel a c b und d f e, in denen die Hypothenusen a b, d e und die Catheten a c, d f proportionirt, und die den Basibus gegen über liegenden spitzigen Winkel g und h einander gleich sind, sind einander ähnlich.

Beweis.

Die Hypothenuse a b verhält sich zur Hypothenuse n m wie die Cathete a c zur Cathete m c; die Hypothenuse a b verhält sich zur Cathete a c wie die Hypothenuse m n zur Cathete m c. Der Winkel g ist = dem Winkel i; ergo ist der Triangel a c b ähnlich dem Triangel m c n. Welches das erste war.

T. XXIII. Fig. 109.

Die Hypothenuse mn ist = der Hypothenuse de; die Cathete mc ist = der Cathete df; und der Winkel i ist = dem Winkel h; ergo ist der Triangel mcn = dem Triangel dfe. Welches das zweyte war.

Et ergo ist der Triangel bac auch ähnlich dem Triangel edf. Welches das dritte und zu beweisen war.

Drey und achtzigster Lehrsatz.

In allen rechtwinklichten Triangeln acb und dfe, in welchen die Hypothenusen ab und de und die Bases cb und fe mit einander proportionirt sind, und deren auf diesen Basibus cb und fe liegende spitzige Winkel g und h einander gleich sind, in selbigen werden auch die Catheten ac und df gegen einander proportionirt, und die obern spitzigen Winkel i und k einander gleich, und beyde Dreyecke acb und dfe einander ähnlich seyn.

Beweis.

T. XXIII. Fig. 110. Die Basis cb verhält sich zur Hypothenuse ba, wie die Grundlinie fe zur Hypothenuse ed, und wie die Basis nb zur Hypothenuse bm. Der Winkel g ist sich selbsten gleich, denn jede Größe ist sich selbsten gleich; der Winkel g ist = dem Winkel h; ergo ist das Dreyeck acb ähnlich dem Triangel mnb. Welches das erste war.

Die

Die Grundlinie nb ist = der Grundlinie fe; der Winkel g ist = dem Winkel h; und die Hypothenuse mb ist = der Hypothenuse de; ergo ist auch der Winkel l = dem Winkel k; und die Cathete mn = der Cathete df; et ergo der Triangel mnb = et ∽ dem Dreyeck dfe. Welches das zweyte war.

Et ergo ist der Triangel acb ähnlich dem Triangel dfe. Welches das dritte und zu beweisen war.

Zusatz.

Hieraus erhellet abermal, daß aus der Proportion der Seiten und aus der Gleichheit der gleichnamigen großen Winkel auf die Aehnlichkeit der geradlinigten Dreyecke zu schließen.

Vier und achtzigster Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreyecke abc mit der Grundlinie ab eine Parallele de ziehet, so sind die beyden Triangel abc und dec einander ähnlich.

Beweis.

Die Perpendikulärlinie df ist = der Perpendikulare eg per constructionem; ergo angulus h = angulo i, et angulus k = angulo l, per constructionem; denn wenn zwey geradlinigte Parallellinien von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, so sind die Wechselwinkel T. XXIV. Fig. III.

einander gleich, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 26., item den funfzigsten Lehrsatz Fig. 70. Ergo verhält sich ca zu cd, wie cb zu ce, und wie sich verhält ca zu cd, also verhält sich auch ab zu de. Welches das erste war.

ca verhält sich zu ab, wie cd zu de; angulus i = angulo h; cb verhält sich zu ba, wie ce zu ed; angulus l = angulo k; ac verhält sich zu cb, wie dc zu ce; angulus m = angulo m. Ergo triangulum cab ∽ trigono cde. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also verhalten sich die Seiten eines jedweden Dreyecks, wie die durch die Parallellinien abgeschnittenen Theile desselben.

Zweyter Zusatz.

Also kann man auch leicht jede gerade Linie sowohl in gleiche als auch in proportionirte Theile theilen.

Dritter Zusatz.

Folglich kann man auch einen jeden Triangel durch Parallellinien in so viel ähnliche und proportionirte Theile theilen, als man will.

Fünf und achtzigster Lehrsatz.

Wenn man in einem Triangel acb mit der Seite bc aus einem auf ac willkührlich angenommenen Punkte d eine Parallellinie df ziehet, und aus dem auf der Basi ab dadurch entstandenen Punkt f mit ac noch eine zweyte Parallellinie fe reißet, so sind die drey Triangel acb, feb und adf einander ähnlich.

Beweis.

Die Seite ca verhält sich zu da, wie ab zu af; der Winkel g ist = g, siehe Regul. Arithm. 1. Angulus m = angulo l, et angulus i = angulo k; denn wenn zwey Parallellinien von einer dritten durchschnitten werden, so sind die Wechselwinkel einander gleich. Ergo verhält sich cb zu ba, wie df zu fa; et ergo verhält sich ac zu cb, wie ad zu df; et ergo ist der Triangel adf ähnlich dem Triangel acb. Welches das erste war. T. XXIV. Fig. 112.

Die Seite cb verhält sich zu eb, wie ba zu bf; der Winkel k ist =k, siehe Regul. Arithm. cit. Angulus n = angulo l, et angulus h = angulo g, siehe Regul. Geometr. 23. Ergo verhält sich ca zu ab, wie ef zu fb; et ergo verhält sich bc zu ca, wie be zu bf; et ergo ist der Triangel bef ähnlich dem Triangel bca. Welches das zweyte war.

ac verhält sich zu cb, wie ad zu df, und wie fe zu eb; ca verhält sich zu ab, wie da zu af, und wie ef zu fb. Der Winkel l ist = dem Winkel m = dem Winkel n; der Winkel g ist = dem Winkel h, der Winkel i ist = dem Winkel k. Ergo ist der Triangel acb ähnlich dem Triangel adf, ähnlich dem Triangel feb. Welches das dritte und zu beweisen war.

Anmerkung.

Wenn in einem solchen Triangel die mit ac und cb parallellaufenden Linien ef und df also gezogen werden, daß sie sich beyde auf der Basi ab in einem gemeinschaftlichen Punkte f berühren, so ist der Winkel p am Scheitelpunkte d des Triangels adf so groß, als die Winkel g + i auf der Basi af dieses Dreyecks, und der Winkel q am Scheitelpunkte e des Dreyecks feb ist so groß, als der Winkel h + dem Winkel k auf der Grundlinie fb des Dreyecks feb.

Sechs und achtzigster Lehrsatz.

Wenn man in einem Triangel acb mit der Basi ab und den Seiten ac und cb nach Willkühr die Parallelen hi, fg und ed ziehet, so entstehen daraus drey Triangel aed, fgb und hci, welche nicht allein einander, sondern auch dem großen Triangel acb ähnlich seyn werden.

Beweis.

Beweis.

Die gerade Linie ch verhält sich zur Seite ca, wie die gerade Linie ci zur Seite cb; hi gehet mit der Basi ab des Triangels acb parallel; ergo ist der Winkel m = dem Winkel k, und der Winkel p = dem Winkel o; et ergo ist der Triangel hci ähnlich dem Triangel acb. Welches das erste war. T. XXIV. Fig. 113.

ca verhält sich zu ea wie ab zu ad; ed gehet mit cb parallel; ergo ist der Winkel q = dem Winkel s, und der Winkel n = dem Winkel o; ergo verhält sich auch die Linie ad zur Basi ab, wie de zu bc; ergo ist der Triangel ade ähnlich dem Triangel abc. Welches das zweyte war.

cb verhält sich zu gb, wie ba zu bf; der Winkel r ist = dem Winkel s, und der Winkel l ist = dem Winkel k; ergo gehet gf mit ca parallel; bc verhält sich zu ca, wie bg zu gf; ergo ist der Triangel bgf ähnlich dem Triangel bca. Welches das dritte war.

ab verhält sich zu bc, wie hi zu ic, und wie ad zu de, und wie fb zu bg; der Winkel p ist = dem Winkel n = dem Winkel o; bc verhält sich zu ca, wie ic zu ch, und wie de zu ea, und wie bg zu gf; der Winkel s ist = dem Winkel q = dem Winkel r; ergo verhält sich auch ca zu ab, wie ch zu hi, und wie ea zu ad, und wie

gf zu fb; ergo ist auch der Winkel m = dem Winkel k = dem Winkel l; et ergo ist der Triangel acb ähnlich dem Triangel hci, ähnlich dem Dreyeck aed, ähnlich dem Dreyeck fgb. Welches das vierte und zu beweisen war.

Zusatz.

Folglich ist auch der Triangel chi ähnlich dem Triangel ead, ähnlich dem Triangel gfb, und derohalben ist auch der Triangel fbg ähnlich dem Triangel hic, und ähnlich dem Triangel ade.

Sieben und achtzigster Lehrsatz.

Wenn man die Seite ac eines gleich- oder ungleichseitigen Triangels acb in e in zwey gleiche Theile theilet, und sodann aus e mit der Basi ab die Parallele ef ziehet, aus e aber mit der Seite cb und aus f mit der Seite ca die Parallelen ed und fd reißet, so werden diese beyden geraden Linien ed und fd in einem Punkte d just auf der Mitte von ab eintreffen, der Triangel acb aber durch die drey Parallellinien ef, ed und fd in vier ähnliche und gleiche Dreyecke ecf, aed, dfb und fde eingetheilet werden.

Beweis.

T. XXIV. Fig. 114. ce = ea ergo cf = fb, siehe den drey und vierzigsten Lehrsatz Fig. 57.; cf = fb, ergo

$ad = db$, et ergo $fd = ae$, et $ed = cf$. Welches das erste war.

$ef = ad = db$; angulus i = angulo g = angulo h, $ec = ae = df$; angulus n = angulo l = angulo m; ergo angulus r = angulo p = angulo q; et ergo triangulum ecf = triangulo aed = triangulo dfb. Welches das zweyte war.

Angulus i + angulo o + angulo p = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln. Angulus n + angulo k + angulo q = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln. Angulus p = angulo q; ergo angulus i + angulo o = angulo n + angulo k; angulus n = angulo o, siehe den funfzigsten Lehrsatz Fig. 77.; ergo angulus i = angulo k, angulus p = angulo q = angulo r; angulus l + angulo s + angulo h = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln. Angulus l = angulo n, angulus h = angulo i; ergo angulus o = angulo l, et angulus k = angulo h; et ergo angulus s = angulo r, $ed = cf$, $df = ec$, $ef = ef$; ergo triangulum $edf \sim$ triangulo fce. Welches das dritte war.

ac = zwey ae, cb = zwey bf, ab = zwey ad oder zwey bd; cb verhält sich zu ba, wie cf zu fe, oder wie ed zu da, oder wie fb zu bd; ca verhält sich zu ab, wie ce zu ef, oder wie ea zu ad, oder wie fd zu db; ergo ist das große Dreyeck cab ähnlich dem Triangel cef, ähnlich dem Dreyeck ead, ähnlich dem Dreyeck fdb,

und ähnlich dem Dreyeck edf. Welches das vierte und zu beweisen war.

Acht und achtzigster Lehrsatz.

Wenn man in einem Triangulo rectangulo acb auf der Basi ab einen willkührlichen Punkt e annimmt, und aus selbigem mit den Seiten ac und cb zwey Parallelen ef und de ziehet, so entstehen in diesem großen gegebenen Triangel acb zwey kleinere gleichfalls rechtwinklichte Dreyecke ade und efb, welche dem gegebenen ähnlich seyn werden.

Beweis.

T. XXV. Fig. 115. Die Linie de gehet mit der Seite cb, und die Linie ef mit der Seite ac parallel per constructionem; angulus acb = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo angulus ade = angulo acb = 90 Grad = einem rechten Winkel; et ergo angulus efb = 90 Grad = einem rechten Winkel. Welches das erste war.

Angulus cde = 90 Grad = einem rechten Winkel; angulus cfe = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo angulus dfe = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo cf = de, et dc = ef. Welches das zweyte war.

ac verhält sich zu ad, wie ab zu ae; der Winkel k ist = k; angulus h = angulo g; ergo

go verhält sich de zu ea, wie cb zu ba; et ergo triangulum ade ∽ triangulo acb. Welches das dritte war.

bc verhält sich zu bf, wie ba zu be. Der Winkel g ist = g; angulus i = angulo k; ergo verhält sich fe zu eb, wie ca zu ab; et ergo triangulum efb ∽ triangulo acb. Welches das vierte war.

Triangulum ade ∽ triangulo acb, et triangulum acb ∽ triangulo efb; ergo triangulum efb ∽ triangulo ade; et ergo sind sich alle drey Dreyecke acb, ade und efb einander ähnlich. Welches das fünfte und zu beweisen war.

Zusatz.

Also kann man durch die Parallellinien in einem Triangel, es mögen selbige mit der Basi oder mit den Lateribus parallel gezogen worden seyn, einen jeden geradlinigten Triangel in so viel ähnliche Triangel zertheilen, als einem beliebt.

Neun und achtzigster Lehrsatz.

Wenn ein Dreyeck abc zweyen andern Dreyecken def und ghi ähnlich ist, so sind alle drey einander ähnlich.

Beweis.

Der Winkel k ist = dem Winkel l und = dem Winkel m; der Winkel n ist = dem Winkel T. XXV. Fig. 116.

o und = dem Winkel p; ergo verhält sich ab zu ac und zu bc, wie de zu df und zu ef, und wie gh zu gi und zu hi; ergo ist auch der Winkel q = dem Winkel r = dem Winkel s; et ergo ist das Dreyeck acb, No. I. ähnlich dem Dreyeck dfe, No. II., ähnlich dem Triangel gih, No. III. Et ergo sind alle drey Triangel einander ähnlich. Welches zu beweisen war.

Neunzigster Lehrsatz.

Wenn bey einem rechtwinklichten Triangel acb aus der Spitze a auf dessen Hypothenuse cb eine Perpendikulärlinie ad gefället wird, so entstehen dadurch zwey neue rechtwinklichte Dreyecke, als adc und bda, welche alle beyde dem Dreyeck cab ähnlich seyn werden.

Erster Beweis.

T. XXV. Fig. 117. Die Basis cb des Triangels acb ist sich selbsten gleich; ad = ad = perpendiculari per constructionem. Der Winkel g und der Winkel k sind beyde zusammengenommen = 90 Grad = einem rechten Winkel. Angulus l = 90 Grad = einem rechten Winkel; der Winkel i ist sich selbsten gleich, und der Winkel g ist = dem Winkel h; ab verhält sich zu ac, wie ad zu dc; ergo verhält sich auch ab zu bc, wie da zu ac; et ergo ist der Triangel cab ∽ dem Triangel cda. Welches das erste war.

Angulus

Angulus l = angulo m = 90 Grad = einem rechten Winkel. Angulus i = angulo k, et angulus g = angulo h; a d verhält sich zu d c, wie b d zu d a; ergo verhält sich auch d a zu a c, wie d b zu b a; et ergo ist das Dreyeck a d c ∽ dem Triangel b d a. Welches das zweyte war. T. XXV. Fig. 117.

Der Winkel m ist = dem Winkel l = dem Winkel g + k; b d verhält sich zu d a, wie a d zu d c, und wie b a zu a c; der Winkel h ist = dem Winkel g, der Winkel h ist gemeinschaftlich dem größten Triangel c b a, und dem kleinsten Dreyeck a b d; der Winkel i ist = dem Winkel k; der Winkel i ist gemeinschaftlich dem größten Triangel b c a und dem mittlern Triangel a c d; ergo ist der Triangel c a b ∽ dem Dreyeck a d c ∽ dem Dreyeck b d a. Welches das dritte und zu beweisen war.

Anmerkung.

Da ich in den vielen Collegiis, welche ich über die theoretische und praktische Geometrie an verschiedenen Orten seit zwölf und mehr Jahren gelesen, gefunden, daß einigen meiner Schüler der Beweis der Aehnlichkeit dieser drey rechtwinklichten ähnlichen Triangel schwer zu fassen gewesen, so habe ich darauf reflectirt, auf was vor eine Art dieser Beweis deutlicher zu erklären sey, und endlich gefunden, daß, wenn ich jedem Dreyeck seinen ihm zukommenden halben Zirkel besonders gebe, solche durch selbige auf folgende Art deutlicher zu demonstriren, und also auch leichter zu begreifen seyn werden.

Zweyter Beweis.

T. XXV. Fig. 117. Die gerade Linie cb ist der Diameter des halben Zirkels cfab, welcher aus dem Centro e gezogen worden; ca ist der Diameter des halben Zirkels adnc, welcher aus dem Centro p beschrieben worden ist; und ab ist der Diameter des halben Zirkels aodb, so man aus dem Centro q construiret hat. Ergo ist der halbe Zirkel cfab ∽ dem halben Zirkel andc ∽ dem halben Zirkel aodb. Welches das erste war.

Der Winkel g + dem Winkel k ist = 90 Grad = einem rechten Winkel; der Winkel l ist = 90 Grad = einem rechten Winkel, und der Winkel m ist = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo ist der Winkel g + k = dem Winkel l = dem Winkel m; et ergo ist der Peripheriewinkel g + k des halben Zirkels cfab ∽ dem Peripheriewinkel l des halben Zirkels adnc ∽ dem Peripheriewinkel m des halben Zirkels aodb. Welches das zweyte war.

Der Winkel i ist gemeinschaftlich dem grossen Triangel cab und dem mittlern Dreyeck cad; der Winkel k des kleinsten Dreyecks adb ist = dem den beyden größern Triangeln gemeinschaftlichen Winkel i; ergo ist der Winkel i des großen Dreyecks cab = dem Winkel i des mittlern Triangels cad = dem Winkel k des kleinsten Dreyecks abd. Welches das dritte war.

Der

Der Winkel h ist gemeinschaftlich dem grossen Triangel c b a und dem kleinsten Triangel a b d; der Winkel g des mittlern Dreyecks ist = dem den beyden Triangeln c a d und a b d gemeinschaftlichen Winkel h. Ergo ist der Winkel h des großen Triangels = dem Winkel g des mittlern Dreyecks = dem Winkel h des kleinsten Dreyecks. Welches das vierte war.

Et ergo triangulum c a b $\sim$ trigono a d b $\sim$ triangulo c d b. Welches das fünfte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Aus diesem Beweise kann man zugleich auf die Proportion der Glieder oder Theile der ähnlichen Figuren schließen; denn wie sich verhält der Bogen oder halbe Zirkel c f a b zu seinem Diameter c b, so verhält sich auch der Bogen a d n c zu seinem Diameter a c, und der Bogen a o d b zu seinem Diameter a b. Welches das erste war.

Item, wie sich verhält die Hypothenuse a b zur Cathete c a, so verhält sich auch die Hypothenuse c a zur Cathete c d, und die Hypothenuse a b zur Cathete a d. Welches das zweyte war.

Und letztens, wie sich verhält c a zu a b, so verhält sich auch c d zu d a und a d zu d b. Welches das dritte war.

Da

Da nun durch diese Proportion die Aehnlichkeit aller gleichnamigen Seiten und Linien dieser drey Triangel cab, cda und adb gegen einander gleichsam zum dritten Mal bewiesen worden, so ist klar, daß selbige alle drey unter sich einander ähnlich seyn müssen. Welches das vierte und zu beweisen war.

Zweyter Zusatz.

Folglich kann man leicht zwischen zwey gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie finden.

C. Von den durch proportionirte Bases gleichen und ähnlichen Triangeln.

Ein und neunzigster Lehrsatz.

T. XXVI. Fig. 118. Wenn drey Triangel abg, bcf und cde proportionirte Bases ab, bc, cd haben, und der erste abg mit dem dritten cde von gleicher Höhe ag und ce ist, so wird der zweyte Triangel bcf dem ersten abg gleich, und dem dritten cde ähnlich seyn.

Beweis.

Der Triangel ced verhält sich zum Triangel bcf, wie die Grundlinie cd zu ihrer dritten Proportionallinie ab; ergo verhält sich auch der Triangel cde zum Triangel abg, wie die Basis cd zur ab. Welches das erste war.

Der

Der Triangel cde verhält sich zum Triangel bcf am Quadratinhalte, wie der Triangel cde zum Dreyeck abg, denn der Triangel bcf ist = dem Triangel abg. Welches das zweyte war.

hb gehet mit ec parallel; denn der Winkel fbc ist = dem Winkel ecd = 90 Grad = einem rechten Winkel, der Winkel l ist = dem Winkel m; ergo geht ed mit fc parallel; et ergo ist das Dreyeck bfc ∽ dem Dreyeck ced = dem Dreyeck agb. Welches das dritte und zu beweisen war.

Zwey und neunzigster Lehrsatz.

Wenn drey Triangel abg, bcf und cde proportionirte Bases ab, bc und cd haben, und der erste agb dem zweyten bcf am Flächeninhalte gleich ist, so wird dieser zweyte dem dritten cde ähnlich seyn.

Beweis.

Der Triangel cde verhält sich zum Dreyeck bfc, wie sich verhält die Basis cd zu ihrer dritten Proportionale ab; et ergo verhält sich auch der Triangel ced zum Triangel agb, wie die Grundlinie cd zu ab. Welches das erste war. T. XXVI. Fig. 119.

Der Triangel cde verhält sich am Quadratinhalte zum Triangel bcf, wie der Triangel cde zum Dreyeck abg; denn der Triangel bfc ist = dem Dreyeck agb. Welches das zweyte war.

ed gehet mit cf parallel, denn der Winkel n ist = dem Winkel m, und ec gehet mit fb parallel, denn der Winkel p ist = dem Winkel o; ergo ist auch der Winkel bfc = dem Winkel ced, et ergo ist das Dreyeck agb = dem Dreyeck bfc, und der Triangel bfc ∽ dem Triangel ced. Welches das dritte und zu beweisen war.

Anmerkung über diese proportionirten gleichen und ähnlichen Triangel.

Da der Beweis dieser beyden letztern Lehrsätze manchen zu hoch, gelehrt und schwer scheinen möchte, so habe ich gesucht, ihn auf nachstehende Art deutlicher zu machen und zu erklären.

Erstens zur Figur 118.

Die Basis ab verhält sich zur Grundlinie bc, wie diese bc zur Basi cd; wenn man nun dem Triangel bfc die Höhe bh geben, und ihn in den Triangel bhi verwandeln könnte, so würde er dem Dreyeck agb gleich und ähnlich seyn; folglich verhält sich das Dreyeck ecd zum Dreyeck agb und bfc oder seinem gleichen bhi, wie die Basis cd zur Basi ab. Da aber der Triangel fcb ∽ dem Triangel edc, so kann er ohnmöglich so hoch wie cf oder bh seyn, weil die Basis bc kleiner als die Grundlinie cd ist, und doch in ähnlichen Dreyecken alle Linien proportionirt seyn müssen; folglich ist des Triangels

gels ced Verhältniß gegen den Triangel bfc, so wie das Verhältniß beyder Grundlinien cd und bc und beyder Höhen ce und bf, zu einander; gleiche Bewandniß hat es auch mit dem Triangel agb und bfc; folglich verhalten sich gleiche hohe Triangel zu einander, wie ihre proportionirten Grundlinien, und hingegen alle Dreyecke von gleichen Grundlinien, wie ihre verschiedenen Höhen.

Zweytens zur Figur 119.

Mit diesen drey Triangeln agb, bfc und ced hat es, gleichwie mit vorigen drey Dreyecken, einerley Bewandniß, nur mit diesem Unterschiede, daß, da in voriger 118ten Figur der erste Triangel auf der kleinsten Proportionale lag, und er dem zweyten bfc am Inhalte gleich seyn sollte, nothwendig bf kleiner als ag seyn muß; allhier aber liegt der Triangel agb auf der größten Proportionale ab. Wenn nun der Triangel bcf, welcher dem ersten agb am Flächeninhalte gleich seyn soll, auf der zweyten Proportionallinie bc liegt, welche, wie bekannt, kleiner als die erste ab ist, so muß er natürlicher Weise höher als der Triangel agb seyn, welches man wohl zu merken hat.

D. Von den Winkeln und Seiten in den Triangeln.

Drey und neunzigster Lehrsatz.

In einem jeden Triangel acb müssen zwey Seiten ac und cb zusammengenommen allezeit grösser als die dritte ab seyn.

Beweis.

T. XXVI. Fig. 120. Der verlängerte Theil cd der geraden Linie ac ist = cb per constructionem. Der Winkel g ist = dem Winkel f; angulus f + angulo e grösser als der Winkel g; da aber ein großer Winkel allezeit einer großen Seite, und ein kleiner Winkel einer kleinern Seite gegen über liegt; so ist auch die Seite ad grösser als die Seite ab; ad = ac + cb; et ergo ist auch ac + cb grösser als ab. Welches zu beweisen war.

Anmerkung.

Da aber manchen dieses wunderbar vorkommen möchte, daß man, um diesen Lehrsatz zu beweisen, die Winkel e, f, g, nebst zwey neuen geraden Linien cd und cb, dazu annehmen muß, so habe ich gesucht, diesen Lehrsatz durch eine andere Figur auf folgende Art deutlicher zu beweisen.

Zweyter Beweis.

T. XXVI. Fig. 121. Gesetzt, man wollte von den Linien ab, ac, bd einen Triangel construiren, so würden die Linien

nien a c und b d, weil sie sichtbar und merklich kleiner als a b, niemals in einem Punkte k zusammen eintreffen, sondern entweder in e und f auf die gerade Linie a b fallen, und selbige nur zum Theil decken, oder wie a c und b d nie einen Raum einschließen, sondern allezeit wie der Punkt c vom Punkt d von einander entfernt bleiben. Welches das erste war.

Sind aber die geraden Linien a g und b h, welche, nebst der geraden Linie a b, ein Dreyeck formiren sollen, beyde zusammengenommen nur so lang wie a b, so werden sich derselben Endpunkte g und h gleichfalls über der Grundlinie a b in k nicht schließen, sondern auf dieser Basi a b in einem Punkt i zusammenfallen, und also die Basin a b nur decken, folglich wiederum keine Figur geben. Welches das zweyte war.

Ist aber a k + b k größer als a b, so werden sich diese Linien a k und b k über a b in k schneiden, und folglich einen Triangel a k b formiren. Et ergo ist a k + b k um das Stück l m größer als a b. Welches das dritte und zu beweisen war.

Vier und neunzigster Lehrsatz.

Wenn in einem Triangel a c b ein ander Dreyeck a d b aufgerichtet wird, so ist a d und b d zusammengenommen kleiner als a c und b c.

Beweis.

T.XXVII. Fig. 122. Die gerade Linie ac + ce ist größer als die gerade Linie ae; eb = eb, denn jede Größe ist sich selbsten gleich, ac + cb ist größer als ae + eb, die kleine Linie de + eb ist größer als die gerade Linie db; ad ist = ad, ae + eb ist größer als ad + db. Ergo sind die Seiten ac + cb zusammengenommen größer als die Seiten ad + bd. Welches das erste war.

Der Winkel f ist größer als der Winkel g, und der Winkel g ist größer als der Winkel h; ergo ist der Winkel f auch größer als der Winkel h. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Fünf und neunzigster Lehrsatz.

In einem jedweden Triangel, er sey von welchem Geschlecht er wolle, machen alle drey Winkel 180 Grad oder zwey rechte Winkel, und wenn man die eine Seite ac des Triangels acb nach d verlängert, so ist der dadurch entstandene äußere Winkel h so groß als die beyden innern ihm auf der Basi ab gegenüber stehenden Winkel e und f.

Beweis.

T.XXVII. Fig. 123. Die Winkel e + dem Winkel i + dem Winkel f sind alle drey zusammengenommen = 180 Grad

Grad = zweyen rechten Winkeln; die Winkel i + h sind beyde zusammengenommen = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln. Ergo angulus i + angulo h = angulo e + angulo i + angulo f. Welches das erste war.

Angulus i = i, denn jede Größe ist sich selbsten gleich; ergo angulus e + angulo f = angulo h; denn wenn man gleiches von gleichem wegnimmt, so bleibet gleiches übrig. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Sechs und neunzigster Lehrsatz.

Wenn man mit der Basi l m eines Dreyecks l n m durch dessen Scheitelpunkt n eine Parallele g o ziehet, so sind die dadurch entstandenen beyden äußern Winkel s und k = den beyden innern auf der Basi stehenden Winkeln p und q.

Beweis.

Die Winkel p + q + r sind alle drey zusammengenommen = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln; die Winkel s + r + k sind = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln; ergo sind die Winkel s + r + k = den Winkeln p + r + q. Welches das erste war. T.XXVII. Fig. 124.

Der Winkel r ist sich selbsten gleich; derohalben sind die Winkel s + k = den Winkeln p

 + q;

+ q; denn wenn man gleiches von gleichem wegnimmt, so bleibet gleiches übrig. Welches das zweyte war.

g o gehet mit l m parallel; ergo ist der Winkel p = dem Winkel s, und der Winkel q = dem Winkel k, siehe **den funfzigsten Lehrsatz** Fig. 70. Welches das dritte und zu beweisen war.

Besonderer Beweis auf beyde Lehrsätze 95 und 96., wenn die Dreyecke a c b und l n m Fig. 123. et Fig. 124. einander ähnlich sind.

T. XXVII. Fig. 123. et 124.

Die Winkel e + i + f, No. I. sind = den Winkeln p + r + q in No. II. siehe **den ersten Band** Regul. Geometr. 51 et 52. Angulus e = angulo p, angulus i = angulo r, et angulus f = angulo q. Welches das erste war.

Der äußere Winkel h ist = seinen beyden ihm auf der Basi a b gegenüber stehenden Winkeln e und f, siehe **den ersten Band** Regul. Geometr. 51. Angulus s + angulo k = angulo p + angulo q, siehe **den ersten Band** Regul. Geometr. Ergo angulus h in No. I. = angulo s + angulo k in No. II. Welches das dritte und zu beweisen war.

Anmerkung.

Da der große Gelehrte und berühmte Professor Baron von Wolf diesen Lehrsatz in einen gebracht, und also beyde zusammen bewiesen, so habe ich von

selbigem

selbigem Beweise (weil ich viel zu viel Ehrfurcht vor einen so gelehrten als bekannten großen Kopf habe) nicht abgehen wollen, doch aber auch gezeigt, daß man einen jeden Triangel vor sich allein beweisen oder demonstriren könne, welches vielleicht nicht unangenehm oder überflüßig seyn wird, weil mir es leichter zu fassen geschienen, und sodann beyde mit einander leichter zu demonstriren sind.

Mechanischer Beweis des 95 und 96sten Lehrsatzes.

Messet erstlich die drey gleichnamigen Seiten der beyden gleichen und ähnlichen Triangel acb und lnm gegen einander, als ab gegen lm, ac gegen ln, und cb gegen nm. Messet ferner die unten auf der Basi ab des Triangels acb stehenden Winkel e und f gegen die auf der Basi lm des Dreyecks lnm stehenden Winkel p und q; desgleichen messet auch die obern den Grundlinien ab und lm gegenüber liegenden Winkel i und r gegen einander, entweder mit dem Transporteur, oder durch Zirkelbogen und derselben Chorden, so werdet ihr finden, daß diese sowohl gleichnamigen Seiten als auch Winkel einander gleich sind; hernach messet die Bogen der Winkel e und f, und traget selbige auf den Bogen des Winkels h, so werdet ihr finden, daß selbige beyde zusammengenommen = dem Winkel h seyn werden; messet auch auf eben diese Art den Winkel p gegen den Winkel s, und den Winkel q gegen den Winkel k, so werden auch (T.XXVII. Fig. 123. et 124.)

diese einerley Oeffnung gegen einander haben, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 25 et 26., item den funfzigsten Lehrsatz Fig. 70., denn alle Wechselwinkel sind einander gleich, woraus also zum dritten Mal die unumstößliche Wahrheit dieses Lehrsatzes bewiesen ist.

Erster Zusatz.

Wenn also zwey Winkel eines Triangels bekannt sind, so kann man den dritten bald finden.

Zweyter Zusatz.

Wenn ein Winkel eines Dreyecks ein rechter Winkel ist, so haben die übrigen beyden zusammengenommen 90 Grad, und folglich kann nur ein rechter Winkel und zwey spitzige, oder ein stumpfer und zwey spitzige Winkel in einem Triangel seyn.

Dritter Zusatz.

Also formiren niemals zwey rechte Winkel, noch weniger ein rechter und ein stumpfer, noch viel weniger zwo stumpfe Winkel einen Triangel.

Vierter Zusatz.

Wo demnach alle drey Winkel in einem Dreyeck gleich seyn sollen, so kann jeder Winkel nicht mehr als 60 Grad halten, siehe Regul. Geometr.

Sieben

Sieben und neunzigster Lehrsatz.

Wenn der obere Winkel a + b eines Triangels cde durch eine aus der Spitze d auf die Basis ce gezogene gerade Linie df in zwey gleiche Theile getheilet worden, so verhält sich der durch die gerade Linie df auf ce entstandene Theil cf zu der längsten Seite cd, wie der Rest fe der Basis ce zu der kürzesten Seite de des Triangels cde.

Beweis.

Die Seite de ist = der Linie dg, so durch die Verlängerung der Seite dc entstanden, per constructionem; ergo ist der Winkel h = dem Winkel i per constructionem et hypothes.; der Winkel h + dem Winkel i ist = dem Winkel a + dem Winkel b, siehe den vier und neunzigsten Lehrsatz Fig. 123.; et ergo ist der Winkel a = dem Winkel i, und der Winkel b = dem Winkel h; et ergo gehet df mit eg parallel. Welches das erste war. T.XXVII. Fig. 125.

Die Seite cd verhält sich zur Seite de, wie der eine Theil der Basis cf zu derselben andern Theile fe. Welches das zweyte war.

Angulus h = angulo a, et angulus b = angulo i; ergo ist auch der Winkel a = dem Winkel b. Welches das dritte und zu beweisen war.

Zusatz.

Zusatz.

Wenn man demnach in einem Triangel cde die Grundlinie ce in f also zertheilet, daß sich cf zu fb verhält, wie cd zu de, so wird die aus f bis in des Dreyecks Spitze d gezogene gerade Linie df den daselbst befindlichen Winkel a + b in zwey gleiche Theile theilen.

Acht und neunzigster Lehrsatz.

Wenn die Basis ab eines Triangels acb nach d verlängert wird, so wird der dadurch entstandene Winkel e + f den auf der andern Seite ac ihm gegenüber stehenden Winkeln g und h gleich seyn, und wenn man aus dem Endpunkte b der Basis ab mit der Seite ac eine Parallele bi ziehet, so ist alsdenn der Winkel e so groß als der Winkel h, und der Winkel f gleich dem Winkel g.

Beweis.

T. XXVII. Fig. 126. Der Winkel k + dem Winkel h + dem Winkel g ist = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 46., item den fünf und neunzigsten Lehrsatz Fig. 123. Der Winkel k + dem Winkel e + dem Winkel f ist = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 58. Angulus k = k; ergo angulus e + f = angulo g + angulo h. Welches das erste war.

Die

Die gerade Linie bi gehet mit der Seite ac des Dreyeckes acb parallel. Ergo ist der Winkel h = dem Winkel e, siehe den funfzigsten Lehrsatz Fig. 70.; der Winkel k + dem Winkel g + dem Winkel f ist = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln; der Winkel k ist sich selbsten gleich, und der Winkel e ist gleich dem Winkel h; ergo ist der Winkel f = dem Winkel g. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Zusatz.

Also sind auch die Winkel k + h + f = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln, und ferner die Winkel e + k + g = 180 Grad = zweyen rechten Winkeln.

Neun und neunzigster Lehrsatz.

In einem gleichschenklichten Dreyeck acb sind die Winkel d und e an der Basi ab einander gleich, und der Perpendikel cf, welcher aus der obern Spitze c auf die Basis ab gefället worden, theilet sowohl den obern Winkel bey c in h und i, wie auch die Basin ab in f und den ganzen Triangel acb, in zwey gleiche Theile.

1. Mechanischer Beweis.

Messet erstens die Schenkel ac und cb des Dreyecks acb, ob selbige von gleicher Länge sind, sodann ziehet sowohl in dem Triangel oben aus T.XXVII. Fig. 127.

c,

c, als auch auf der Basi aus a und b, drey Zirkelbogen, messet die Chorde des Bogens vom Winkel d gegen die Chorde des Bogens vom Winkel e, so werden diese beyden Bogen oder Winkel d und e einander gleich seyn. Messet zweytens die Chorde des Bogens oder Winkels h gegen den Bogen i, selbige sind wiederum gleich groß, und der Winkel g auf der Basi a b ist ein rechter Winkel. Ergo ist die gerade Linie c f, welche den Scheitelwinkel h + i in zwey gleiche Theile getheilet hat, eine Perpendikulärlinie, welche diese Basis in zwey gleiche Theile theilet, daß also durch diese Perpendikulärlinie c f der Triangel a c f = dem Dreyeck b c f geworden ist. Welches zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

T. XXVII. Fig. 127. Die halbe Basis a f ist = der halben Basi f b per constructionem, et a c = b c. Ergo ist der Winkel d = dem Winkel e, siehe den ersten Band Regul. Geometr.; a f = f b. Angulus a f c = angulo c f b = 90 Grad = einem rechten Winkel. Angulus d = angulo e; ergo angulus h = angulo i. Welches das erste war.

c f = c f = perpendiculari; ergo triangulum a f c = et ∽ triangulo c f b. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also sind dieses gleichschenklichte Triangel, wo die Winkel auf der Basi einander gleich, und beyde Winkel zusammengenommen größer oder kleiner sind, als der der Basi gegenüber stehende Winkel.

Zweyter Zusatz.

Folglich müssen in einem gleichseitigen Dreyeck alle drey Winkel einander gleich seyn.

Hundertster Lehrsatz.

In einem gleichschenklichten Triangel abc sind die Winkel d und e an der Basi ac einander gleich, und wenn die Schenkel ba und bc nach f und g wie bf und bg verlängert worden, so sind auch die unter dieser Basi ac stehenden zwey Winkel, als h + i und k + l, einander gleich.

1. Mechanischer Beweis.

Man nehme vor bekannt an, als habe man das gleichschenklichte Dreyeck abc nach dem 98sten Lehrsatze durchgemessen und richtig befunden, verlängere sodann ba nach f, und bc nach g, mache af und cg = ba oder bc, ziehe cf und ag, messe den Winkel i gegen den Winkel k, und den Winkel h gegen den Winkel l, und letztens den Winkel n gegen den Winkel o, so werden

Tab. XXVIII. Fig. 128.

werden nicht allein diese Winkel nach ihrer Art einander gleich, sondern auch der Triangel a c f dem Dreyeck c a g gleich und ähnlich seyn. Welches zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Tab. XXVIII. Fig. 128.

Die Seite a b ist = b c; angulus m = m; ergo ist der Winkel d = dem Winkel e. Welches das erste war.

a f = c g, a c = a c, et a g = c f; angulus i + h = angulo k + l; angulus o = angulo n, et angulus i = angulo k. Ergo triangulum a c f = et ∽ triangulo c a g. Welches das zweyte war.

b f = b g, a b = b c; angulus m = m; angulus i + angulo d = angulo e + angulo k; angulus n = angulo o; ergo a g = c f, et ergo triangulum a b g = et ∽ triangulo c b f. Welches das dritte war.

Et ergo ist der Winkel i + h = dem Winkel k + l; der Winkel i ist = dem Winkel k, folglich der Winkel h = dem Winkel l. Welches das vierte und zu beweisen war.

Zusatz.

Ergo ist ein jeder gleichseitiger Triangel auch gleichwinklicht.

Hundert und erster Lehrsatz.

In einem jeden Triangel abc ist allezeit die größte Seite ac dem größten Winkel i entgegengesetzt, und ziehet man aus einem willkührlichen Winkel dieses Triangels noch eine andere gerade Linie in diesem Triangel, als ad, so wird der Winkel f, weil er noch größer als der Winkel i ist, wiederum der Basi ac entgegen stehen.

1. Mechanischer Beweis.

Dem Augenmaaße nach, so wie auch in der That, ist der Winkel f der größte im Dreyeck adc. Nun messet die drey Seiten desselben, als ad, dc und ac gegen einander, so wird man finden, daß ac unter diesen dreyen die längste ist. Nun nehmet den Triangel abc, in selbigem ist der Winkel i der größte, und sobald ihr dessen Seiten ab, bc und ca nachmessen werdet, so werdet ihr wiederum finden, daß ac die längste Seite des Triangels abc ist, weil sie dem größten Winkel gegenüber liegt. Nun nehme man auch den kleinen Triangel abd an, in selbigem ist die Seite ad, wenn man sie mißt, die längste, weil selbige dem Winkel i unterspannet ist. Diese Probe des Nachmessens der Linien und Winkel kann man mit allen geradlinigten Triangeln vornehmen, so wird man allezeit finden, daß der größte Winkel der längsten Seite, und im Gegentheil die kleinste Seite dem kleinsten Winkel gegenüber liegt.

Tab. XXVIII. Fig. 129.

2. Mathematischer Beweis.

Tab. XXVIII. Fig. 129.

Die Basis ac ist größer als ab oder bc, der Winkel i ist größer als der Winkel g, größer als der Winkel e + h; da nun der Winkel i der größte Winkel, und die Basis ac die größte oder längste Seite dieses Dreyecks abc ist, und der Winkel i der Basi ac gegenüber liegt; so ist auch in jedem Dreyeck die längste Seite ac dem größten Winkel i unterspannet. Welches das erste war.

Die Seite ab ist kürzer als bc oder ac; der Winkel g ist kleiner als der Winkel e + f, kleiner als der Winkel i; da nun der Winkel g der kleinste Winkel, und die Seite ab die kürzeste Seite dieses Dreyecks acb ist, und der Winkel g der kürzesten Seite ab gegenüber liegt; so ist auch in jedem Dreyeck die kürzeste Seite ab dem kleinsten Winkel g unterspannet. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Derohalben ist in einem rechtwinklichten Dreyeck die Hypothenuse allezeit die längste Seite, weil selbige dem größten, nämlich dem rechten Winkel, unterspannet ist.

Zweyter Zusatz.

Tab. XXVIII. Fig. 130.

Wenn man also auf die gerade Linie gh aus dem Punkt i einen Perpendikel ik fället, so ist

ist diese Perpendikulärlinie i k die kürzeste von allen andern geraden Linien i m, i n, i l, so von eben dem Punkt i auf die Grundlinie g h gezogen worden, weil selbige alle die rechten Winkel bey k unterspannen.

Dritter Zusatz.

Ergo ist die Linie i n von allen aus i auf die Grundlinie g h gezogenen geraden Linien die längste, weil selbige dem stumpfen Winkel o gegenüber liegt oder unterspannet ist.

Vierter Zusatz.

Also kann man erstens aus einem Punkte i nur einen Perpendikel i k auf die Grund- oder gerade Linie g h fällen, und zweytens kann man neben dieser Perpendikulare i k aus i auf jeder Seite nur eine einzige gleichlange gerade Linie i m oder i n ziehen.

Fünfter Zusatz.

Derohalben müssen in einem Dreyeck, es sey von was vor Geschlecht es wolle, allezeit zwey Seiten zusammengenommen größer als die dritte seyn.

Hundert und zweyter Lehrsatz.

Wenn in einem triangulo rectangulo p o q die Hypothenuse p q sich nach r und s dergestalt Tab. XXVIII. Fig. 131.

 verschie-

verschiebet, daß der Punkt p, ohne von der Basi o p abzukommen, sich bis nach r bewegt, zu gleicher Zeit aber den Endpunkt q der geraden Linie p q dergestalt in die Höhe drückt, daß selbiger mit der Cathete o q in directione perpendiculari endlich im Punkt s zu liegen kömmt, so verkürzt sich die Basis o p, und wird o r; hingegen vergrößert sich o q, und wird o s; das ist: wenn aus der Hypothenuse p q die Hypothenuse r s wird, so verwandelt sich die Basis o p in die Grundlinie o r, und die Cathete o q wird in die Cathete o s metamorphosirt. Was demnach durch diese Verschiebung der Basis o p abgehet, wächset davor der Cathete o q an: als, das Stück r p gehet unten von o p ab, hingegen wächset das Stück q s der Cathete o q zu.

Zusatz.

Auch kann sich die Hypothenuse s r dergestalt herunter verschieben, daß aus s o q o, und aus o r o p wird; so wächset in diesem Falle der Grundlinie o r zu, was der Cathete s o durch diese Verschiebung abgehet.

Hundert und dritter Lehrsatz.

Tab. XXVIII. Fig. 136.

In einem jeden Triangel a m c, b i c und b f c liegt der größte Winkel s oder r oder q der größten Seite a c oder b c oder f c gegen über.

Beweis.

Beweis.

Im Triangel acb ist ab die größte Seite; der Winkel dce ist größer als der Winkel cab, oder als der Winkel cba; ergo liegt der Winkel dce der längsten Seite ab gegenüber. Welches das erste war. Tab. XXVIII. Fig. 132.

ca ist größer als am oder mc, der Winkel s ist größer als der Winkel acm oder cam; cb ist größer als cm oder bm, und der Winkel cmb ist größer als der Winkel mcb oder bcm. Ergo liegt der Winkel s gegen der Seite ac, und der Winkel cmb gegen der Seite von cb über. Welches das zweyte war.

cn ist größer als cm oder nm; ergo ist auch der Winkel s größer als der Winkel ncm, oder als der Winkel mnc. ci ist größer als cm oder mi; derohalben ist der Winkel imc größer als ein spitziger Winkel. cf ist größer als ci oder if; ergo ist der Winkel r auch grösser als ein rechter Winkel. cb ist größer als cf oder fb; ergo ist der Winkel q ein stumpfer Winkel. Welches das dritte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Woraus also klar erhellet, daß der größte spitzige Winkel, oder der rechte Winkel, oder der stumpfe Winkel eines Dreyecks der größten Seite desselben gegenüber liegt.

Zweyter Zusatz.

Und, umgekehrt, ist allezeit dem größten Winkel in einem Dreyeck die längste Seite des Triangels unterspannet.

Dritter Zusatz.

Weil also in einem gleichseitigen Dreyeck alle drey Seiten einander gleich sind, so sind auch die Winkel in selbigem gleich groß.

Vierter Zusatz.

Folglich werden auch in jedem gleichwinklichten Dreyeck alle drey Seiten, welche selbiges einschließen, einander gleich seyn.

Hundert und vierter Lehrsatz.

Wenn unter zweyen Triangeln abc und def die Seite ab = de und bc = ef, der obere Winkel g aber größer ist als der Winkel h, so ist auch natürlicher Weise die Basis ac größer als die Grundlinie df.

1. Mechanischer Beweis.

T. XXIX. Fig. 133. et 134.

Man messe erstens ab gegen de, und bc gegen ef, so wird man finden, daß diese respektive Seiten gegen einander gleiche Länge haben werden. Da aber der Winkel h um den Winkel i kleiner ist als der Winkel k, oder sein gleicher

cher g, so ist es natürlich, daß, vermöge der kürzern Spannung des Bogens oder Winkels h, die Seite ef näher nach ed, als bc gegen ba, anrücken, und folglich auch df viel kürzer als ac werden muß. Welches zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Die Basis ac ist kleiner als die Seite ab oder cb. Ergo ist auch der Winkel g kleiner als der Winkel k oder n, siehe vorhergehenden hundert und zweyten Lehrsatz. ab = de, bc = eq, ac = dq; ergo triangulum deq = et ∽ triangulo abc; et ergo angulus h + i = angulo g, minor angulo l vel k, minor angulo p vel n. Welches das erste war. T. XXIX. Fig. 133. et 134.

Latus ef = ed = eq; ergo angulus o = angulo m + angulo l, et angulus r = angulo t + angulo p. Der Winkel o ist größer als der Winkel h; ergo ist auch der Winkel l + dem Winkel m größer als der Winkel h. Der Winkel r ist größer als der Winkel i; ergo ist der Winkel t + dem Winkel p größer als der Winkel i; et ergo ist ac oder dq kleiner als ab oder cb, kleiner als de oder qe. Welches das zweyte war.

Et ergo ist df kleiner als de oder ef, und fq ist kleiner als fe oder eq, folglich ist auch df oder fq kleiner als ac. Welches das dritte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also liegt in einem jedweden Dreyeck die kleinste Seite dem kleinsten Winkel, und vice versa der größte Winkel der größten Seite gegenüber.

Zweyter Zusatz.

T. XXIX. Fig. 135. et 136. Also folget, daß, wenn zwey Triangel abc und def die respektiven Seiten ab, de und bc, ef gleichlang haben, der dazwischen liegende Winkel g aber größer als der Winkel h ist, die Basis ac sodann auch länger als die Basis df seyn werde.

Hundert und fünfter Lehrsatz.

Wenn aus der Spitze c eines trianguli aequilateri acb mit der Spannung ca ein Zirkel bdfega beschrieben wird, so läßt sich die Seite ca just sechsmal auf der Circumferenz des Zirkels herumtragen, dergestalt, daß die Linie ab die Peripherie abdfeg in sechs gleiche Theile theilet.

1. Mechanischer Beweis.

T. XXIX. Fig. 137. Gesetzt, man habe ein triangulum aequilaterum acb, so setzet in dessen einem Winkel c einen Zirkel, spannet ihn aus bis in a, und reisset den Zirkelkreis abdfeg, in welchem sich die Distanz ab sechsmal herum tragen lassen wird. Ziehet man nun die Chorden ab, bd, df, fe, eg,

ga,

ga, so hat man nicht allein ein reguläres Sechseck beschrieben, sondern auch die Zirkelperipherie in sechs gleiche Theile getheilet.

2. Mathematischer Beweis.

Der Radius ca ist = dem Radio cb = der Chorde ab; ergo ist der Winkel h am Centro c = 60 Grad, siehe den ersten Band Regul. Geometr. Ergo ist der Bogen aib = 60 Grad, siehe Regul. Geometr. 68. und derselben Anmerkung. 60 Grad sind = einem sechsten Theil von 360 Grad per divisionem. Ergo ist der Sector acb des Zirkels abdfeg = dem sechsten Theil von diesem Zirkel; et ergo ist der Bogen ab = dem Bogen bd = dem Bogen df = dem Bogen fe = dem Bogen eg = dem Bogen ga. Welches zu beweisen war.

T. XXIX. Fig. 137.

Erster Zusatz.

Daraus folget, daß man in einem Zirkel ganz leicht ein reguläres Sechseck beschreiben kann.

Zweyter Zusatz.

Also darf man nur zwey Theile eines Sechseckes, als ab + bd, df + fe und eg + ga durch gerade Linien ad, ed, ea zusammenziehen, so hat man ein triangulum aequilaterum aed in einem Zirkel abdfeg construirt.

Dritter Zusatz.

So darf man nur die Bogen abd, dfe, ega jeden in drey gleiche Theile theilen, so bekömmt man ein in einem Zirkel beschriebenes reguläres Neuneck.

Vierter Zusatz.

Theilet man aber den Bogen ab in i in zwey gleiche Theile, so läßt sich ai zwölfmal auf der Peripherie herum tragen, und man erhält ein reguläres Zwölfeck.

Zweytens von den Quadrilateris.

A. Von den Vierecken an sich selbst.

Hundert und sechster Lehrsatz.

Alle Quadrate abcd und efgh sind einander ähnlich, und verhalten sich unter einander, wie ihre Seiten ad und eh.

Beweis.

T. XXX. Fig. 138. et 139. Die Seite ad des großen Quadrats adcb verhält sich zu seiner Diagonale ac, wie die Seite eh des kleinern Quadrats ehgf zu seiner Diagonale eg per constructionem. Angulus i = angulo k = 90 Grad = einem rechten Winkel. ad = dc, et eh = hg; ergo triangulum acd ∽ triangulo egh. Welches das erste war.

Die Diagonale ac ist sich selbsten gleich; die Diagonale eg ist sich selbsten gleich, siehe Regul. Geometr.; die Diagonale ac ist der Diagonale eg ähnlich, siehe den ersten Band. ab = ad per constructionem; ef = eh, cb = cd, gf = gh per constructionem. Ergo triangulum abc = triangulo adc, et ∽ triangulo efg, et triangulum efg = triangulo ehg, et ∽ triangulo abc. Welches das zweyte war.

Da nun beyde Triangel abc und adc, so wie die Triangel efg und egh, einander gleich sind, und der Triangel acd dem Triangel egh ähnlich ist, so ist auch das Quadrat abcd ∽ dem Quadrat efgh. Welches das dritte und zu beweisen war.

Zusatz.

Wo also durch Diagonallinien ähnliche Triangel in Parallelogrammis entstehen, da sind auch die Parallelogramma einander ähnlich.

Hundert und siebenter Lehrsatz.

Wenn ein Parallelogrammum abcd mit einem Triangel abe eine gemeinschaftliche Basin ab hat, und sich beyde, als das Parallelogrammum abcd und der Triangel abe, an der mit ab parallellaufenden Linie ce endigen, so ist das Parallelogrammum abcd noch einmal so groß, als das Dreyeck abc.

1. Mechanischer Beweis.

T. XXX. Fig. 140. Ziehet zwey willkührliche Parallellinien ab und ce; auf ab errichtet einen willkührlichen Triangel acb, dessen Spitze c die obere Parallele ce berühre, ziehet mit ac die Parallellinie bd. Nun messet bd, diese ist = ac, messet auch ab, die ist = cd; ergo ist abcd ein regulärer Rhomboides, dessen Diagonale die gerade Linie cb ist. Nun ist cb = cb, oder die gemeinschaftliche Basis des Triangels acb und dbc; ab = cd, ac = bd; ergo triangulum bac = et ∽ triangulo cdb; et ergo ist der Rhomboides acdb doppelt so groß als das Dreyeck bac oder cdb. Desgleichen ist das Dreyeck cab oder bdc halb so groß, als das Parallelogrammum acdb.

2. Mathematischer Beweis.

Die Grundlinie ab = ab, denn jede Größe ist sich selbsten gleich, siehe den ersten Band Regul. Arithm. ce gehet parallel mit ab; ergo ist das Dreyeck abc = et ∽ dem Triangel abe. Welches das erste war.

bc = bc, cd = ab, ac = bd; ergo triangulum cbd = et ∽ triangulo bca; ergo ist der Triangel cba oder cbd = $\frac{1}{2}$ parallelogrammo abcd; et ergo ist auch das Dreyeck abe = $\frac{1}{2}$ Rhomboidi acdb. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Hundert

Hundert und achter Lehrsatz.

Zwey Parallelogramma abcd und cdef, welche auf einer gemeinschaftlichen Grundlinie cd stehen, und einerley Höhe ca oder db haben, sind einander gleich.

Beweis.

Die Grundlinie cd = ab, ab = ef; ergo ef = cd, siehe den ersten Band Regul. Arithm. ae = bf, ac = bd; angulus x = angulo y; ergo ce = df; et ergo triangulum ace = et ∽ triangulo bdf. Welches das erste war. T. XXX. Fig. 141.

Das Dreyeck beg ist sich selbsten gleich; ergo ist das Trapezium abge = dem Trapezio efdg. Welches das zweyte war.

Das Dreyeck cgd ist sich selbsten gleich; ergo ist das Parallelogrammum abcd = dem Rhomboidi cdef. Welches das dritte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also kann man ein Quadrat für einen Rhombum, und ein Parallelogrammum rectangulum für einen Rhomboidem annehmen und berechnen, wenn jenes mit diesem einerley Grundlinie und einerley Höhe hat.

Zweyter

Zweyter Zusatz.

Demnach ist auch ein jedes Dreyeck die Hälfte eines Parallelogrammi, so mit ihm gleiche Basin und gleiche Höhe hat.

Dritter Zusatz.

Folglich ist ein Parallelogrammum doppelt so groß als ein Dreyeck, so mit ihm von gleicher Grundlinie und Höhe ist.

Hundert und neunter Lehrsatz.

Zwey Parallelogramma rectangula abcd und efgh von gleicher Höhe ac oder eg und von ungleich langen geraden Grundlinien ab und ef verhalten sich gegen einander wie ihre Bases.

1. Mechanischer Beweis.

T. XXX. Fig. 142. et 143. Gesetzt, man wollte zwey Zimmer abcd und efgh, eines von 9 Ellen, und das andere von 15 Ellen lang, mit Bretern belegen oder dielen lassen, beyde Zimmer aber hätten einerley Breite von 10 Ellen; so hat man schon mit der Breite oder Länge der Breter nichts zu thun, sondern nur mit derselben Anzahl; ich rechne auf die Stube von 9 Ellen 18 Breter, zwölf Zoll breit, nämlich auf eine Elle zwey Breter; in das Zimmer efgh brauche

che ich auf den Platz von e g bis i k auch 18 Breter, nun bleiben mir noch 6 Ellen von k bis f übrig, wozu mir noch zwölf Breter nöthig sind, daß ich also in das Zimmer e f g h in allem 30 Stück Breter verbraucht habe. Da ich nun, in Ansehung der egalen Breite dieser zwey Zimmer a b c d und e f g h, nicht auf die Länge der Breter, sondern nur in Ansehung der Länge der Zimmer auf die Anzahl der dazu verbrauchten Breter zu sehen habe, so verhalten sich demnach 18 zu 30 Breter, wie 9 zu 15, oder wie 3 zu 5. Welches mechanisch zu beweisen war.

2. Mathematischer Beweis.

Die Basis a b = 3, die Grundlinie e f = 5, ergo verhält sich a b zu e f, wie 3 zu 5. Der Winkel y ist = dem Winkel x = 90 Grad = einem rechten Winkel. a c = e g, a b = e k; ergo ist das Quadrangulum a b c d = dem Parallelogrammo e k g i; k f = $\frac{2}{3}$ e k; ergo verhält sich das Rectangulum a b c d zum Quadrangulo e f g h, wie 3 zu 5. Welches zu beweisen war. T. XXX. Fig. 142. et 143.

Anmerkung.

Da sich das Parallelogrammum a b c d zum Parallelogrammo e f g h nach unserm doppelten Beweise verhält, wie 3 zu 5, beyde Rectangula aber von egaler Höhe a c und f h sind, und von Parallellinien eingeschlossen werden, so theile man demnach e f in fünf gleiche Theile, und trage g i und e k auf c d und a b, so wird man finden, daß a b c d = e k g i, und k f i h

als

als $\frac{3}{5}$ von e f g h übrig bleiben, folglich ist klar, daß sich das Parallelogrammum e k g i zum Oblongo e f g h verhält, wie 3 zu 5. Da nun das Quadrangulum a b c d = dem Oblongo e k g i per constructionem; so verhält sich auch das Oblongum a b c d zum Rechteck e f g h, wie 3 zu 5. Welches zu beweisen war.

Zusatz.

Weil jeder Triangel die Hälfte eines Parallelogrammi ist, so mit ihm gleiche Basin und Höhe hat, so verhalten sich auch gleich hohe Parallelogramma, wie ihre Bases.

Hundert und zehnter Lehrsatz.

Wenn in einem Parallelogrammo a b c d eine Diagonallinie b c gezogen wird, und man sodann mit a b und b d zwey Parallelen e f, h i ziehet, welche sich auf der Diagonale c b im Punkt g schneiden, so ist das Oblongum a e g i = dem Rectangulo h d g f.

Beweis.

T. XXXI. Fig. 144. a b = c d, a c = b d, c b = c b; ergo ist der Triangel b a c = et ∽ triangulo c d b. Welches das erste war.

d f = h g, h d = g f; ergo h d g f parallelogrammum rectangulum; e g = a i, e a = g i; ergo e g a i oblongum rectangulum. Welches das zweyte war.

ch

ch = eg, ce = hg, cg = cg; ergo triangulum ceg = et ∽ triangulo chg. Welches das dritte war.

ib = gf, gi = fb, et gb = gb; ergo triangulum gib = et ∽ triangulo gfb. Welches das vierte war.

Ergo triangulum ceg + quadrato egai + trigono gib = triangulo chg + oblongo hdfg + trigono gfb. Welches das fünfte war.

Et ergo ist das oblongum aieg = dem Parallelogrammo hgdf. Welches das sechste und zu beweisen war.

Hundert und eilfter Lehrsatz.

Wenn man einen Rhomboidem dcab durch zwey mit ab und bd parallellaufende gerade Linien gh und ef also theilet, daß sich diese zwey geraden Linien gh und ef auf der Diagonallinie bc in i alle drey schneiden oder kreuzen, so sind die dadurch entstandenen zwey Rhomboides eaig und hidf einander gleich.

Beweis.

Die Diagonallinie bc ist sich selbsten gleich; bd = ca, und ba = cd; ergo ist das Dreyeck bdc = et ∽ dem Triangel cab. Welches das erste war. T. XXXI. Fig. 145.

ic = ic, denn jede Größe ist sich selbsten gleich; if = cg, ig = cf; ergo ist das Dreyeck ifc = et ∽ dem Dreyeck cgi. Welches das zweyte war.

bi = bi, bh = ei, et be = hi; ergo triangulum bhi = et ∽ triangulo bei. Welches das dritte war.

Ergo triangulum cfi + triangulo bhi + rhomboide hidf = et ∽ trigono igc + triangulo bei + rhomboide eaig; wenn man nun gleiches von gleichem wegnimmt, so bleibt gleiches übrig, siehe den ersten Band Regul. Arithm. Ergo parallelogrammum hidf = parallelogrammo eaig. Welches das vierte und zu beweisen war.

Zusatz.

Also theilen die Zwerchlinien alle reguläre Quadrangula, als da sind die Quadrata, Oblonga, Rhombi und Rhomboides, accurat in zwey gleiche Theile.

Hundert und zwölfter Lehrsatz.

Ein jedes Trapezium acdb wird durch die Diagonallinie ae in zwey Triangel acd und abd getheilet, und durch selbige und die aus den Punkten oder Winkeln c und b auf die Diagonale da gefällten Perpendikel ce und bf vermessen und berechnet.

Zusatz.

Zusatz.

Da die Diagonale in diesem Falle zu der beyden Triangel acd und dab gemeinschaftlichen Basi ad wird, so darf man nur erstens ad, ce und bf messen, sodann beyde Perpendikel ce und fb addiren, diese Summe halbiren, und die herausgekommene Hälfte mit der Diagonale ad multipliciren, so bekömmt man den Flächeninhalt des Trapezii acdb. T. XXXI. Fig. 146.

Hundert und dreyzehnter Lehrsatz.

Eine jede irreguläre geradlinigte Fläche aceb muß, ehe man selbige berechnen kann, durch eine Diagonallinie ae in zwey Triangel ace und eba zertheilet, und durch die in selbige gefällten Perpendikel ad und ef berechnet werden.

Zusatz.

In vorhergehender 146sten Figur wurde die Diagonale ad zur gemeinschaftlichen Basi beyder Dreyecke acd und dba; allhier Figura 147. wird die Diagonale ae als eine gemeinschaftliche Seite für beyde Dreyecke cea und bae angenommen, und die Seiten ce und ab der geradlinigten, viereckigten, irregulären Figur als Grundlinien beybehalten, auf welche man aus a und e die Perpendikularen ad und ef fället, sodann ef mit der Hälfte von ab, ad mit der Hälfte von ce (wenn man alle vier gerade Linien vorher ge- T. XXXI. Fig. 147.

messen) multiplicirt, und diese Produkte halbiret, um den Quadratinhalt dieser Figur zu bekommen.

Hundert und vierzehnter Lehrsatz.

T. XXXI. Fig. 148. Wenn man den Flächeninhalt einer geradlinigten, irregulären, viereckigten Figur acdb wissen will, so theilet man erstens diese Figur acdb durch eine Diagonale af in zwey Dreyecke acd und dba, hernach fället man auf af aus c die Perpendikulare ce, und aus b den Perpendikel bg, multiplicirt ce mit ad, desgleichen auch bg mit ad, addiret beyde Produkte, und halbiret diese Summe; so ist der Quadratinhalt dieser viereckigten Fläche acdb gefunden.

Erste Anmerkung über den 111ten, 112ten und 113ten Lehrsatz.

T. XXXI. Fig. 146. 147. 148. Also kann man den Flächeninhalt eines jeden geradlinigten Dreyecks auf dreyerley Art finden, als:

Erstens, wenn man den halben Perpendikel mit der ganzen Basi multipliciret:

Zweytens, wenn man den ganzen Perpendikel mit der halben Basi multipliciret; und dann

Drittens, wenn man den ganzen Perpendikel mit der ganzen Grundlinie multipliciret, und dieses Produkt halbiret.

Zweyte Anmerkung.

Auch ist es einerley, ob man die Diagonallinie ad wie in Figura 146. zur gemeinschaftlichen Basi annimmt,

nimmt, und auf selbige die Perpendikularen ce und bf fället:

Oder ob man die Diagonale ae, wie in Figura 147., zu einer gemeinschaftlichen Seite annimmt, und aus selbiger die Perpendikularen ad und ef fället:

Oder ob man die Perpendikulare bg außer der Figur auf die Basin af fället; so wird man immer gleich recht procediren.

Hundert und funfzehnter Lehrsatz.

Wenn man eine gerade Linie xz in y nach Willkühr zertheilet, so ist das Quadrat abde von xz gleich den zweyen Quadraten gidf von xy, und cbhi von yz, sammt den zwey Complementen oder Parallelogrammis acig und hefi von xy und yz.

Beweis.

xz = xz; weil nun das Quadratum perfectum von und auf xz, als der gegebenen geraden und in y zertheilten Linie, construirt worden, so ist auch ab = be = ed = da; die Diagonallinie db ist sich selbsten gleich. Angulus k = 90 Grad = einem rechten Winkel; angulus p = angulo q, siehe den funfzigsten Lehrsatz Fig. 70.; angulus p = angulo m; ergo angulus m = angulo q; angulus k = 90 Grad = einem rechten Winkel; et ergo angulus m + angulo q = 90 Grad = einem rechten Winkel = angulo k; angulus l = 90 Grad = einem rechten Winkel; angulus l = zweyen Winkeln m, et ergo angulus n = $\frac{1}{2}$ Winkel l; ergo gd = gi = if = fd

Tab. XXXII. Fig. 149.

fd = xy; et ergo quadratum gifd, quadratum perfectum. Welches das erste war.

cb = ci = bh = ih = yz; angulus o = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo cbhi quadratum perfectum. Welches das zweyte war.

ci = ag = yz, ig = ca = xy, ih = fe = ic = yz, if = he = ig = xy; ergo parallelogrammum acgi = oblongo ihfe. Welches das dritte war.

Et ergo ist das große Quadrat abed = dem Quadrat gifd + dem Quadrat cbhi + dem parallelogrammo acig + dem parallelogrammo ihef. Welches das vierte und zu beweisen war.

Zusatz.

Wenn also eine gerade Linie just in zwey gleiche Theile getheilet wird, und man construirt erstens von der ganzen Linie ein Quadrat, sodann wiederum aus dem Theilungspunkte accurate Vierecke, so entstehen daraus vier Quadrate von egaler Größe, welche alle vier zusammengenommen dem Quadrat, so man von der ganzen Linie formiret hat, gleich seyn werden.

Hundert und sechzehnter Lehrsatz.

Wenn man eine gerade Linie db in zwey gleiche Theile dc und cb theilet, dc als den ersten

Theil aber wiederum in a in zwey ungleiche Theile da und ac, so wird das Quadrat dghc von der halben Linie dc gleich seyn dem parallelogrammo alfb, so von der halben Linie cb, dem ungleichen Theile ac, und dem kleinen Theile de oder seinem gleichen da construiret worden, sammt dem Quadrat lkih, so man von dem mittlern Theile ac aufgerichtet hat. Das ist: das Quadratum perfectum dchg ist = dem parallelogrammo alfb + dem Quadrat lihk.

Beweis.

ac + da = dc, lk = kh = hi = il = ac; angulus m = 90 Grad = einem rechten Winkel. Ergo lihk quadratum perfectum. da = al = le = ed; angulus n = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo dale quadratum perfectum. Welches das erste war. T.XXXII. Fig. 150.

le = la, li = lk, per constructionem; gi = le, et li = eg, ck = la, et kl = ca, per constructionem. Ergo parallelogrammum legi = oblongo lkca. Welches das zweyte war.

dc = dg, ek = ai, ad = ed, ad = gi, de = ck; ergo parallelogrammum dekc = rectangulo dagi. Welches das dritte war.

dc = cb, ek = kf, kc = kc, kc = de, fb = kc; ergo parallelogrammum bfkc = oblongo cked = rectangulo daig. Welches das vierte war.

Ergo gnomon giel + elda + alkc = parallelogrammo alfb. Welches das fünfte war.

Et ergo quadratum perfectum dchg = parallelogrammo alfb + quadrato lihk. Welches das sechste und zu beweisen war.

Hundert und siebzehnter Lehrsatz.

Wenn man eine gerade Linie cd in b in zwey gleiche Theile cb und bd theilet, und man an cb noch einen beliebigen Theil ac von undeterminirter Länge ansetzt, so wird das lange parallelogrammum ahld von der ganzen gegebenen Linie cd sammt dem zugesetzten Theile ac mit ah, sammt dem Quadrat kfgi von cb, oder seiner gleichen ki, gleich seyn dem Quadrat aegb, so man von cb, als der halben Linie cd und dem Zusatze ac, construiret hat, das ist: das oblongum ahld + dem Quadrat kfgi ist = dem großen Quadrat aegb.

Beweis.

T.XXXII. Fig. 151. ac = ck, ah = hk, ah = ac; angulus x = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo ackh quadratum perfectum. ki = ig, gf = fk, fk = ki; angulus y = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo fgki quadratum perfectum. Welches das erste war.

Parallelogrammum rectangulum ahld = oblongo kicb + oblongo ilbd + quadrato ahkc.

ahkc. cb = bd, ib = ib, ib = kc, kc = ld, ki = il; ergo parallelogrammum ckib = oblongo ibld. Welches das zweyte war.

kf = ki, kf = eh, kc = kh, kh = ef; ergo parallelogrammum kfeh = oblongo kcib = rectangulo ilbd. Welches das dritte war.

Parallelogrammum ilbd + parallelogrammo kicb + quadrato ahkc = gnomoni ef kh, hkac, ckib; ergo quadratum kfgi + oblongo ahld = quadrato aegb. Welches das vierte und zu beweisen war.

Hundert und achtzehnter Lehrsatz.

Wenn man auf einer geraden Linie ab einen Punkt c annimmt, so ist das ganze Quadrat abed, so von ab aufgesetzt worden, sammt dem kleinen Quadrat dhlk, so man von ac aufgesetzt hat, zweymal so groß, als das parallelogrammum afbg oder achd + dem Quadrat igeh, von cb construirt, einmal genommen oder quadratum abed + quadrato acif vel quadrato dhlk = parallelogrammo abgf + oblongo filk + quadrato igeh.

Beweis.

ac = af, af = fi = ic = ca; angulus w = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo acif quadratum perfectum; ig = cb, ig = ih = he = eg; angulus z = angulo w = 90 Grad = einem T.XXXII. Fig. 152.

 nem

nem rechten Winkel; ergo igeh quadratum perfectum. Welches das erste war.

ac = dh, ac = ci = if = fa; ergo acif quadratum perfectum. dh = hl = lk = kd; angulus y = angulo w = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo quadratum dhlk = quadrato acif. Welches das zweyte war.

cb = fd, cb = ig, ci = bg, fd = ih, if = dh; ergo parallelogrammum cbgi = oblongo ihfd. Welches das dritte war.

Parallelogrammum abgf = parallelogrammo filk oder das oblongum cbgi + quadrato acif = oblongo fihd + quadrato dhlk. Welches das vierte war.

Ergo oblongum abgf + rectangulo iflk + quadrato igek = quadrato abed + quadrato dhlk vel quadratum abed + quadrato dhlk = zweyen parallelogrammis abgf + quadrato igeh. Welches das fünfte und zu beweisen war.

Hundert und neunzehnter Lehrsatz.

Wenn man eine gerade Linie cb in d nach Willkühr theilet, und diesen Theil cd aus c nach a an bc anhängt, und auf ab ein Quadratum perfectum abkg construirt, sodann aber die Theile ac und cd auf ak aus a nach m und e trägt, hierauf aus c und d mit ak, und aus m und e mit ab die Parallelen mn und ef, desgleichen

gleichen cl und dh ziehet, so werden die Parallelogramma cqfb und mkhp zusammengenommen, sammt dem Quadrat ihgf, gleich seyn dem ganzen Quadrat akgb auf cb + ca.

Beweis.

ca = cd, am = ac = me, dp = pi = ac, eq = qi = ac; ergo quadratum acmo = quadrato codp = quadrato opiq = quadrato meqo. Welches das erste war. Tab. XXXIII. Fig. 153.

db = ek, dp = pi = bn = nf, eq = qi = kl = lh, if = db, hi = ke; ergo parallelogramınum dbpn = oblongo pnif = oblongo ekql = rectangulo lqhi; et ergo oblongum cbon + onqf = rectangulo mokl + olph. Welches das zweyte war.

Da nun das Quadrat oqip doppelt genommen wird, und sowohl zum Parallelogrammo oqfn, als zum Oblongo olhp gehöret, und also beyden Parallelogrammis qilh und pifn gemeinschaftlich ist, hingegen das ihm gleiche Quadrat amoc ausgelassen wird, so ist klar, daß das Quadrat akgb = ist den zweyen Parallelogrammis mkhp + cbfb + dem Quadrat ihgf. Ergo sind die vier Parallelogramma conb, oqfn, mokl, olhp + dem Quadrat hgif = dem Quadrat akgb. Welches das dritte und zu beweisen war.

B. Von

B. Von den Vierecken, so auf den Seiten der Triangel entstehen.

Hundert und zwanzigster Lehrsatz.

In einem Triangulo rectangulo bac ist das Quadrat cbhi der Hypothenuse cb = dem Quadrat abde der Cathete ab und dem Quadrat acfg der Basis ac zusammengenommen.

Anmerkung.

Da ich diese Bogen nicht für Gelehrte und Mathematicos, sondern für schwache Köpfe, wie auch für solche, so die Geometrie von selbsten lernen wollen, aufgesetzt habe, so habe ich diesen Lehrsatz auf nachstehende dreyerley Arten und durch dreyerley Figuren also bewiesen.

1. Mechanischer Beweis.

Tab. XXXIII. Fig. 154. Man construire ein rechtwinklichtes Dreyeck cab, und mache in selbigem die Basin ac so lang, als die Cathete ab, doch also, daß ba accurat rechtwinklicht auf der Basi ac aufstehe; sodann errichte man auf ac das Quadrat acfg, und auf ab das Quadrat abde, auf bc aber das dritte Quadrat bcih, ziehe durch das Quadrat abde die Diagonale ad, durch das Quadrat acgf die Diagonale ag, und durch das Quadrat bhic die zwey Diagonalen bi und ch; hierdurch erhält man acht rechtwinklichte Triangel abd, aed, afg, acg, bkc, hkb, hki und ikc, wel-

che alle = dem gegebenen rechtwinklichten Dreyeck cab, worauf die drey Quadrate abde, afgc und bcih construiret worden sind, gleich seyn werden, denn

ac = ab per constructionem; ba stehet auf eac in a winkelrecht; ergo angulus x = 90 Grad = einem rechten Winkel; ae = ab, et af = ac per constructionem. bd = ba, de = ae, cg = ac, et fg = af, ad = ag, ad = ad; ergo triangulum aed = et ∽ triangulo abd, ag = ag; ergo trigonum acg = et ∽ trigono afg = et ∽ triangulo cab. Welches das erste war.

bk = ac, ab = ck, bc = bc; ergo triangulum bkc = et ∽ trigono bac, kh = kb, bh = bc; ergo triangulum hkb = et ∽ triangulo bkc; et ergo triangulum cbh vel ckb + bkh = quadrato abde vel trigono abd + aed. Welches das zweyte war.

hk = ki, hi = hb; ergo triangulum hki = trigono hkb, ki = kh, kc = ki, ic = hi; ergo triangulum kic = trigono hki vel trigono cab; et ergo triangulum hic vel trigonum hik + trigono ikc = quadrato acfg vel triangulo acg + afg. Welches das dritte war.

Ergo quadratum abde + quadrato acgf = quadrato bhic. Welches das vierte und zu beweisen war.

Anmer-

Anmerkung.

Dieser Beweis, welcher zwar richtig, accurat, und leicht einzusehen und zu begreifen, aber dennoch nicht allgemein ist, schickt sich nur, wenn das Triangulum rectangulum also construirt ist, daß die Basis a c = der Cathete a b, und folglich die Hypothenuse b c die Größe der Diagonallinien a d und a g der auf der Basi a c und Cathete a b stehenden kleinen Quadrate a c g f und a b d e bestimmt, und also neun Triangula aequalia formiret; denn es ist der Triangel a b d No. 1. = c k b No. I., a e d No. 2. = b k h No. II., a c g No. 3. = b k h No. III., a f g No. 4. = i k c No. IV., welche sammt dem rechtwinklichten Dreyeck b a c neun gleichgroße Triangel betragen.

2. Geometrischer Beweis.

Tab. XXXIV. Fig. 155. Man construire ein Triangulum rectangulum b a c, und richte es also ein, daß man auf die Basin a b drey, und auf die Cathete a c vier gleiche Theile setze, so wird man finden, daß die Hypothenuse c b fünf solcher auf a b oder a c aufgesetzten Theile lang seyn wird; sodann construiret man an der Basi a b ein reguläres Quadrat a b f g, ingleichen auf der Cathete a c ein anderes a c d e, und dann auf und von der Hypothenuse c b das dritte c b i h, nachher theilet man a f, so wie a b, in drey, a c, so wie a e, in vier, und b i, so wie b c, in fünf gleiche Theile, hernach formiret man durch Parallellinien aus diesen Theilungspunkten im Quadrat a b f g auf der Basi a b neune, im Quadrat a c d e auf der Cathete a c sechzehn, und im Quadrat c b i h auf der Hypothenuse

pothenuse cb fünf und zwanzig kleine Quadrate, woraus man wiederum deutlich und klar zum zweytenmale sehen wird, daß das Quadrat cbih der Hypothenuse cb fünf und zwanzig kleine Quadrate, als die Summe der beyden andern Vierecke, wie das Quadrat acde sechzehn, und das Quadrat abgf neune, welches in Summa auch fünf und zwanzig ist, giebt.

Anmerkung.

Dieser Beweis ist zwar wiederum richtig und accurat, aber nicht allgemein; denn wenn man zum Exempel der Basi vier, und der Cathete fünf Theile gäbe, so würden beyde zusammen ein und vierzig kleine Quadrate betragen, welche Summe von ein und vierzig sich in kein Quadrat bringen läßt, indem die nächsten Quadratzahlen 36 und 49 sind, also nach dem ersten Falle um 5 kleine Quadrate zu klein, nach dem andern Falle aber um 8 dergleichen kleine Quadrate zu groß seyn würde, daß ich also, um diesen so schönen als gelehrten und nutzbaren Lehrsatz recht klar und auf alle Fälle eines rechtwinklichten Dreyeckes zu beweisen, zu dem Beweise der dazu gehörigen letztern Figur schreiten muß.

3. Mathematischer Beweis.

Die gerade Linie cf gehet mit der geraden Linie bg parallel, der Triangel bai stehet mit dem Parallelogrammo bkli auf einer gemeinschaftlichen Basi bi, derohalben ist das Dreyeck $abi = \frac{1}{2}$ Parallelogrammo bkli, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 56., item den Tab. XXXIV. Fig. 156.

Zusatz

Zusatz 2. des 108ten Lehrsatzes. Welches das erste war.

Die gerade Linie cf gehet mit der geraden Linie bg parallel; der Triangel bgc stehet mit dem Quadrat abfg auf einer gemeinschaftlichen Basi bg, derohalben ist das Dreyeck cbg = $\frac{1}{2}$ Quadrat abfg, siehe Regul. Geometr. cit., wie auch den angeführten zweyten Zusatz des 108ten Lehrsatzes. Welches das zweyte war.

ab = bg, bc = bi, cg = ai; ergo triangulum cbg = triangulo abi; et ergo quadratum abfg = parallelogrammo bkli. Welches das dritte war.

Die gerade Linie ch gehet mit al parallel; der Triangel ach stehet mit dem Parallelogrammo chkl auf einer gemeinschaftlichen Basi ch, derohalben ist das Dreyeck ach = $\frac{1}{2}$ Parallelogrammo chkl. Welches das vierte war.

Die gerade Linie dc gehet mit eb parallel; das Dreyeck dcb liegt mit dem Quadrat dcea auf einer gemeinschaftlichen Basi dc; derohalben ist der Triangel dcb = $\frac{1}{2}$ Quadrat dcea. Welches das fünfte war.

cb = ch, dc = ca, db = ha; ergo triangulum dcb = triangulo ach; et ergo parallelogrammum chkl = quadrato acde. Welches das sechste war.

Ergo

Ergo quadratum abfg + quadrato acde = parallelogrammo klbi + oblongo klch, vel quadratum abfg + quadrato acde = quadrato bchi. Welches das siebente und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also kann man leicht Quadrate addiren, multipliciren, subtrahiren und dividiren.

Zweyter Zusatz.

Folglich kann man auch alle Risse aus dem Großen ins Kleine, und aus dem Kleinern ins Größere bringen.

Dritter Zusatz.

Und daher kann man auch das Verhältniß des Diameters zu seiner Peripherie finden.

Hundert ein und zwanzigster Lehrsatz.

In einem stumpfwinklichten Triangel bac ist das Quadrat bcno der größten Seite bc so groß, als das Quadrat acqp auf ac, und als das Quadrat khif, so von der Linie ab construiret worden, sammt dem Parallelogrammo dbgh und daei, so von der ganzen Linie db und den durch die Perpendikulare cd entstandenen Ueberschuß da construiret worden sind.

Beweis.

T. XXXV. Fig. 157. Quadratum d b f e = quadrato k h i f + dem kleinen Viereck a d g k + den beyden Parallelogrammis a b h k und g k e i, denn das Ganze ist so groß, als alle seine Theile zusammengenommen. Welches das erste war.

Quadratum a c q p + quadrato a d g k + quadrato h k i f = zweyen Parallelogrammis b d g h + dem Quadrat d c l m. Das Quadrat a c q p ist = dem Quadrat a d g k + dem Quadrat d c l m, et quadratum b d e f + quadrato d c l m = quadrato b c n o. Ergo quadratum c b o n = quadrato a c q p + quadrato k h f i + zweyen Parallelogrammis b d g h oder d a e i. Welches zu beweisen war.

Hundert zwey und zwanzigster Lehrsatz.

In einem spitzwinklichten Triangel a c b ist das Quadrat c b q p auf der längsten Seite c b, so dem Winkel a gegenüber liegt, kleiner, als die zwey Quadrate a c o n, auf der Seite a c, und als das Quadrat a b d e, auf der Basi a b, um die Parallelogramma a b h i und h k l m, so von der ganzen Linie a b und den durch die Perpendikulare c f entstandenen Theil a f construiret worden sind.

Beweis.

Beweis.

Das Quadrat abed auf der Basi ab + dem Quadrat dglm ist = dem Viereck kieg von fb + dem Rechteck abhi von ab und ah, zweymal genommen. Welches das erste war. T. XXXV. Fig. 158.

Das Quadrat acon auf ac + dem Quadrat abde + dem Quadrat dglm ist = dem Quadrat kieg + dem Quadrat fcts auf der Perpendikulare cf + dem Parallelogrammo hklm zweymal genommen; das Quadrat afkh + dem Quadrat fcts ist = dem Quadrat acon, denn das Dreyeck afc ist ein rechtwinklicht Dreyeck, und das Viereck kieg + dem Quadrat fcts ist = dem Quadrat cbqp. Ergo ist das Quadrat abed + dem Quadrat acon = dem Quadrat bcqp + dem Parallelogrammo abhi + dem Oblongo hklm; et ergo ist das Quadrat cbqp kleiner als das Quadrat acon nebst dem Quadrat abed, weniger den beyden Rechtecken abhi und hklm. Welches das zweyte und zu beweisen war.

C. Von den Quadraten, so in den Zirkeln entstehen.

Hundert drey und zwanzigster Lehrsatz.

Wenn sich in einem Zirkel acbd zwey gerade Linien ab und cd im Centro e durchschnei-

den, so ist das Quadrat aecf auf ae und ec = dem Quadrat ebgd auf eb und ed.

Beweis.

Tab. XXXVI. Fig. 159.

Der Semidiameter ea ist = dem Semidiameter eb, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 59.; ae = ec, ed = ec; ergo ed = eb. Welches das erste war.

Angulus h = angulo i = 90 Grad = einem rechten Winkel; af = ae, cf = ce, bg = be, dg = de; ergo quadratum aecf = quadrato ebgd. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Hundert vier und zwanzigster Lehrsatz.

Wenn sich in einem Zirkel aocbdp zwey gerade Linien ab und cd in e winkelrecht durchschneiden, der Durchschnittspunkt e aber nicht auf dem Centro f stehet, ab aber doch durchs Centrum f gehet, so theilet ab die Linie cd in e in zwey gleiche Theile, und ist alsdann das Quadrat feki, so auf fe construiret worden, sammt dem Parallelogrammo aehg, so gemacht worden von ae und eb, gleich dem Quadrat afon des Semidiameters af; das Quadrat afon aber ist gleich feki und elmd von ed. Nun ist das das Quadrat feki sich selbsten gleich, folglich ist das Parallelogrammum aegh gleich dem Quadrat elmd.

Beweis.

Beweis.

Angulus ceb = 90 Grad = einem rechten Winkel; angulus bed = angulo ceb = 90 Grad = einem rechten Winkel; ae verhält sich zu ec oder seiner gleichen ed, wie ed zu eb. Ergo parallelogrammum aegh = quadrato elmd, denn el ist die mittlere Proportionallinie zwischen ae und eb; oblongum aegh + quadrato ef ik = quadrato afno. Das Quadrat afon ist = dem Quadrat feki + dem Quadrat edlm; ergo parallelogrammum aehg = quadrato el md. Welches zu beweisen war. Tab. XXXVI. Fig. 160.

Hundert fünf und zwanzigster Lehrsatz.

Wenn sich zwey gerade Linien eg und fl in einem Zirkel cledg dergestalt schneiden, daß keine von den beyden sich durchschneidenden Linien durchs Centrum a gehet, und man durch den Durchschnittspunkt b den Diameter cd ziehet, so ist der Rhomboides gbfh von gb und be gleich dem Parallelogrammo cbki, so vom Diameter cb und bd construiret worden, dieses Quadrat cbik aber ist gleich dem Rhomboidi lbem; ergo ist das Rectangulum lbem auch gleich dem Rhomboidi efhg. Tab. XXXVI. Fig. 161.

Anmerkung.

Da der Beweis dieses Lehrsatzes und desselben Figur so klar und kurz ist, daß selbiger im Lehrsatze zu-

den, so ist das Quadrat aecf auf ae und ec = dem Quadrat ebgd auf eb und ed.

Beweis.

Tab. XXXVI. Fig. 159. Der Semidiameter ea ist = dem Semidiameter eb, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 59.; ae = ec, ed = ec; ergo ed = eb. Welches das erste war.

Angulus h = angulo i = 90 Grad = einem rechten Winkel; af = ae, cf = ce, bg = be, dg = de; ergo quadratum aecf = quadrato ebgd. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Hundert vier und zwanzigster Lehrsatz.

Wenn sich in einem Zirkel aocbdp zwey gerade Linien ab und cd in e winkelrecht durchschneiden, der Durchschnittspunkt e aber nicht auf dem Centro f stehet, ab aber doch durchs Centrum f gehet, so theilet ab die Linie cd in e in zwey gleiche Theile, und ist alsdann das Quadrat feki, so auf fe construiret worden, sammt dem Parallelogrammo aehg, so gemacht worden von ae und eb, gleich dem Quadrat afon des Semidiameters af; das Quadrat afon aber ist gleich feki und elmd von ed. Nun ist das das Quadrat feki sich selbsten gleich, folglich ist das Parallelogrammum aegh gleich dem Quadrat elmd.

Beweis.

Beweis.

Angulus ceb = 90 Grad = einem rechten Winkel; angulus bed = angulo ceb = 90 Grad = einem rechten Winkel; ae verhält sich zu ec oder seiner gleichen ed, wie ed zu eb. Ergo parallelogrammum aegh = quadrato elmd, denn el ist die mittlere Proportionallinie zwischen ae und eb; oblongum aegh + quadrato ef ik = quadrato afno. Das Quadrat afon ist = dem Quadrat feki + dem Quadrat edlm; ergo parallelogrammum aehg = quadrato el md. Welches zu beweisen war. Tab. XXXVI. Fig. 160.

Hundert fünf und zwanzigster Lehrsatz.

Wenn sich zwey gerade Linien eg und fl in einem Zirkel cledg dergestalt schneiden, daß keine von den beyden sich durchschneidenden Linien durchs Centrum a gehet, und man durch den Durchschnittspunkt b den Diameter cd ziehet, so ist der Rhomboides gbfh von gb und be gleich dem Parallelogrammo cbki, so vom Diameter cb und bd construiret worden, dieses Quadrat cbik aber ist gleich dem Rhomboidi lbem; ergo ist das Rectangulum lbem auch gleich dem Rhomboidi efhg. Tab. XXXVI. Fig. 161.

Anmerkung.

Da der Beweis dieses Lehrsatzes und desselben Figur so klar und kurz ist, daß selbiger im Lehrsatze zu-

gleich begriffen und enthalten ist, so habe ich vor unnöthig erachtet, einen weitern Beweis hinzuzufügen, um eine einzige Figur ohne Ursache doppelt zu erklären.

Hundert sechs und zwanzigster Lehrsatz.

Tab. XXXVII. Fig. 162.

Wenn sich zwey gerade Linien a b und c d im Zirkel a d m b c t dergestalt in f schneiden, daß a b durchs Centrum e gehet, c d aber in f nicht winkelrecht durchschnitten wird, und also d c in ungleiche Theile theilet, und man sodann aus e auf d eine gerade Linie e d ziehet, und aus e auf c d den Perpendikel e g fället, so ist das Parallelogrammum c f h i von c f und f d, sammt dem kleinen Quadrat g f l k auf f g, = dem Quadrat e m n d auf dem Radio e d. Ferner ist das Oblongum c i h f + dem Quadrat g f l k + dem Quadrat p g e o auf g d = dem Quadrat g d v w auf g d + dem Quadrat p o e g; ferner ist sodann auch das Quadrat f e r q gleich den Quadraten p o e g und g k l f. Derohalben ist auch das Quadrat e r q f, nebst dem Parallelogrammo c i h f, gleich dem Quadrat e m n d, item ist das Quadrat e m n d gleich dem Parallelogrammo b f q u + dem Quadrat e r f q; derohalben ist das Oblongum c f h i + dem Quadrat e r q f gleich dem Rectangulo b u q f. Da nun das Quadrat e r f q sich selbsten gleich ist, so folget, daß das Oblongum c f h i = ist dem Parallelogrammo b u f q.

Anmer-

Anmerkung.

Da der Beweis dieses Lehrsatzes wiederum im Lehrsatze selbst enthalten ist, so hat er gleichfalls, wie in vorhergehender 161sten Figur, keines zweyten Beweises nöthig.

Hundert sieben und zwanzigster Lehrsatz.

Wenn von einem außerhalb einem Zirkel cdibq stehenden Punkt a eine gerade Linie ab, so durch das Centrum e gehet, und eine andere Linie ac, so diesen Zirkel nur in c berühret, gezogen wird, so ist das Oblongum abfg, so von ab und da formiret worden, gleich dem Quadrat aclm, so man auf der berührenden Linie ac construiret hat. Tab. XXXVIII. Fig. 163.

Beweis.

Der Radius eb ist = dem Radio ed, denn alle Radii eines Zirkels sind einander gleich; da = da, denn jede Größe ist sich selbsten gleich; das Parallelogrammum abfg + dem Quadrat edki ist = dem Quadrat aeon. Das Quadrat aeon ist = dem Quadrat ecpq + dem Quadrat aclm. Das Quadrat cpqe ist sich selbsten gleich; ergo ist das Parallelogrammum abfg = dem Quadrat aclm. Welches zu beweisen war.

Hundert acht und zwanzigster Lehrsatz.

Tab. XXXIX. Fig. 164.

Wenn aus einem außerhalb einem Zirkel ebfd stehenden Punkt a eine gerade Linie ab, so nicht durchs Centrum c gehet, sondern den Zirkel in e durchschneidet, und in b berühret, gezogen wird, und man aus eben diesem Punkte a eine andere den Zirkel ebfd in d berührende gerade Linie ad ziehet, so verhalten sich die darauf und darinnen zu construirenden Quadrate, wenn man vorher aus dem von außen liegenden Punkte a durch das Centrum c die gerade Linie af gezogen, und aus dem Centro c auf die durchschneidende Linie ab den Perpendikel ci gefället hat, also, daß das Parallelogrammum abhg von ab und ae gleich ist dem Quadrat adop auf der Tangente ad.

Beweis.

Das Parallelogrammum abhg + dem Quadrat iekl ist = dem Quadrat aimn. Das Quadrat civw ist sich selbsten gleich; ergo ist das Parallelogrammum abhg + dem Quadrat ielk + dem Quadrat civw = dem Quadrat aimn + dem Quadrat civw; das Quadrat civw + dem Quadrat ikle ist = dem Quadrat ceud; das Quadrat aimn + dem Quadrat icvw ist = dem Quadrat acqr. Ergo ist das Parallelogrammum abhg + dem Quadrat ceud = dem Quadrat acqr; et oblongum afst + dem

+ dem Quadrat cyxz = dem Quadrat acqr. Ergò ist das Oblongum abhg + dem Quadrat cdue = dem Rectangulo afst + dem Quadrat cedu; das Quadrat ceud ist sich selbsten gleich; ergo ist das Oblongum abhg = dem Oblongo afst; das Oblongum afst ist = dem Quadrat adop; et ergo ist das Parallelogrammum abhg = dem Quadrat adop. Welches zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Derohalben können nicht mehr als zwey berührende Linien aus einem Punkte an einen Zirkel gezogen werden.

Zweyter Zusatz.

Wenn aus einem willkührlichen Punkte ausserhalb eines Zirkels zwey Tangenten gezogen worden, so werden selbige allezeit von gleicher Länge seyn.

Dritter Zusatz.

Also müssen die Berührungspunkte vom gegebenen Punkte gleichweit abstehen.

Vierter Zusatz.

Wenn also zwey gleichlange gerade Linien aus einem außerhalb dem Zirkel stehenden Punkte nach der Peripherie des Zirkels gezogen werden,

den, und die eine berührt den Zirkel, so wird auch die andere selbigen berühren.

Hundert neun und zwanzigster Lehrsatz.

Tab. XL. Fig. 165. Wenn aus einem außerhalb eines Zirkels m k e b liegenden Punkte a zwey gerade Linien a e und a b, von welchen die erste a e den Zirkel in m durchschneidet, die andere a b aber selbigen nur in b berühret, gezogen werden, und das Quadrat a b c d auf der Tangente a b gleich ist dem Parallelogrammo a e f g, so von der Secante a e und von der außer dem Zirkel liegenden Secante a m construiret worden, so ist die gerade Linie a b eine wahre berührende Linie oder Tangente, gleichwie a k.

Beweis.

Die Tangente a b ist = der berührenden Linie a k per constructionem. b c = b a, k i = k a; angulus y = 90 Grad = einem rechten Winkel; angulus x = angulo y; ergo angulus x = 90 Grad = einem rechten Winkel. c d = d a = a b, i h = h a = a b; ergo quadratum a b c d = quadrato a k i h. Welches das erste war.

Die Tangente a b ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Secante a e, und dem Theile der Secante a m; ergo ist das Parallelogrammum a e f g = dem Quadrat a b c d; et

ergo

ergo ist das Parallelogrammum aefg auch = dem Quadrat akih. Welches das zweyte war.

Der Winkel x ist = 90 Grad = einem rechten Winkel; der Winkel y ist = dem Winkel x; ergo ist auch der Winkel y = 90 Grad = einem rechten Winkel. Angulus z = angulo y. Ergo ist die gerade Linie ab eine wahre berührende Linie. Welches das dritte und zu beweisen war.

Zusatz.

Ergo stehen alle berührende Linien ab und ak in den Berührungspunkten b und k winkelrecht auf ihrem Radio lb oder lk.

Hundert und dreyßigster Lehrsatz.

Wenn man eine gerade Linie ab in c in zwey gleiche Theile, cb aber in d in zwey ungleiche Theile theilet, so wird das Quadrat adyz auf ad, sammt dem Quadrat dbwx auf db, noch einmal so groß seyn, als die Quadrate acqr und cduv zusammengenommen. T. XLI. Fig. 166.

Beweis.

ac = cb per constructionem; angulus ace = angulo bce = 90 Grade = perpendiculari; ce = cb, be = be; ergo angulus ceb = angulo cbe, et ergo angulus ceb + angulo cbe = 90 Grad = einem rechten Winkel. Angulus aec + angulo bec = 90 Grad = einem rechten Winkel;

Winkel; ergo angulus aec = angulo ebc. Die gerade Linie tf gehet mit ab parallel, ergo angulus egf = 90 Grad = einem rechten Winkel; et ergo ist der Winkel efg = dem Winkel ebc; et ergo ge = gf. Angulus fdb = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo angulus dfb = angulo fbd, et ergo df = db. Ergo quadratum aeih = quadrato acqr + quadrato ceob, et ergo quadratum efnm = zweyen Quadraten setg; quadratum ahie + dem Quadrat efnm = dem Quadrat aflk. Ergo quadratum aflk = zweyen Quadraten acqr + zweyen Quadraten cduv. Quadratum ad yz + dem Quadrat dbwx = dem Quadrat afkl; et ergo quadratum adyz + quadrato dbwx = zweyen Quadraten acqr + zweyen Quadraten cduw. Welches zu beweisen war.

Hundert ein und dreyßigster Lehrsatz.

T. XLII. Fig. 167. Wenn man eine gerade Linie ab in c in zwey gleiche Theile theilet, und an selbige noch ein willkührliches Stück bd der Länge nach ansetzet, so ist das Quadrat adst der ganzen Linie ad, sammt dem Quadrat bdgu des Zusatzes bd, zweymal so groß, als das Quadrat acnm auf ac, und cdpo auf cd, oder das Quadrat ag rq ist = dem Quadrat ehig auf eg + dem Quadrat aekl auf ae.

Beweis.

Beweis.

ab = ab, ae = eb, ec = ec = perpendiculari; ergo angulus x = angulo z; angulus x + angulo z = 90 Grad = einem rechten Winkel; angulus x = angulo y; angulus y = angulo &. Ergo angulus y + angulo & = 90 Grad = einem rechten Winkel. Welches das erste war.

gf gehet mit ec parallel; ergo angulus z = angulo dgb; et ergo angulus dbg = angulo dgu; angulus dbg = angulo &; ergo angulus bdg = 90 Grad = einem rechten Winkel = angulo x plus angulo z. Ergo dg = db; angulus efg = 90 Grad = einem rechten Winkel. cd gehet mit ef parallel; ergo angulus efg = angulo bdg = 90 Grad = einem rechten Winkel; ergo angulus fec = 90 Grad = einem rechten Winkel; et ergo fe = fg = cd. Welches das zweyte war.

Das Quadrat aelk ist = zweyen Quadraten acnm, denn es stehet auf der Hypothenuse ae des rechtwinklichten Dreyecks ace, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 77. Das Quadrat egih + dem Quadrat aekl ist = zweyen Quadraten acnm + dem Quadrat egih. Das Quadrat aelk + dem Quadrat egih ist = dem Quadrat agqr, und das Quadrat aelk + dem Quadrat egih ist = zweyen Quadraten acnm + zweyen Quadraten efhv + dem Quadrat fg

wi.

wi. Ergo ist das Quadrat a g q r = zweyen Quadraten a c n m + zweyen Quadraten c d p o. Das Quadrat a g q r ist = dem Quadrat a d t s + dem Quadrat b d g u; ergo ist das Quadrat a d t s + dem Quadrat b d g u = zweyen Quadraten a c n m + zweyen Quadraten c d p o. Welches das dritte und zu beweisen war.

Drittens von den regulären und irregulären Vielecken.

Hundert zwey und dreyßigster Lehrsatz.

Alle Multangula irregularia similia a b c d e und f g h i k werden durch die Diagonallinien e b, e c und f h, f i in ähnliche Triangel e a b, f g h, b e c, h f i, e d c, f k i eingetheilt.

Beweis.

T. XLIII. Fig. 168. Die Basis e d verhält sich zur Diagonale e c, wie die Grundlinie f k zur Diagonale f i; der Winkel n ist = dem Winkel q; ergo verhält sich auch d c zu k i, wie c e zu i f; et ergo ist der Triangel e c d ∽ dem Triangel f i k. Welches das erste war.

Die Diagonale b e verhält sich zur Diagonale c e, wie die Diagonale h f zur Diagonale i f; der Winkel m ist = dem Winkel p; ergo verhält sich auch e c zu c b, wie f i zu i h; et ergo ist

ist der Triangel bec ∽ dem Triangel hfi. Welches das zweyte war.

ea verhält sich zu ab, wie fg zu gh; der Winkel l ist = dem Winkel o; ergo verhält sich ab zu be, wie gh zu hf; et ergo ist das Dreyeck abe ∽ dem Dreyeck ghf. Welches das dritte war.

Der Triangel abe verhält sich zum Triangel ghf, wie das Dreyeck bec zum Dreyeck hfi; das Dreyeck ebc verhält sich zum Dreyeck fhi, wie der Triangel ced zum Triangel ifk. Ergo figura irregularis abcd ∽ figurae irregulari ghikf. Welches das vierte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Alle irreguläre Multangula haben zwey Triangel weniger, als Seiten sind, und derowegen kann man ähnliche Figuren construiren, wenn gegeben worden: erstens, alle Seiten der Figur und drey Diagonalen weniger als Seiten sind; zweytens, oder alle Seiten und drey Winkel weniger, als das ganze Multangulum Seiten hat; und dann drittens, wenn gegeben worden alle Latera der Figur weniger zwey, und alle Winkel weniger einen.

Zweyter Zusatz.

Also sind in ähnlichen Figuren sowohl die gleichnamigen Seiten, als auch die gleichnamigen Diagonalen proportionirt, und folglich lassen sich die großen Figuren auf dem Felde nach einem verjüngten Maaßstabe leicht kleiner zu Papiere bringen, und also eine ganze Gegend von einigen Meilen ausmessen und in Grund legen.

Dritter Zusatz.

Also lassen sich sowohl reguläre als irreguläre Flächen durch Triangel berechnen, und derselben Flächen- oder Quadratinhalt finden.

Vierter Zusatz.

Endlich kann man auch Quadrate in Parallelogramma und allerley Arten von Triangeln metamorphosiren.

Hundert drey und dreyßigster Lehrsatz.

Alle reguläre Vielecke a b c d e f können in so viel gleichseitige Triangel, als sie Seiten haben, eingetheilt werden.

Beweis.

T. XLIII. Fig. 169. Der Radius ga ist = dem Radio gb = dem Radio gc = dem Radio gd = dem Radio ge = dem

= dem Radio gf, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 59. Angulus h = angulo i = angulo k = angulo l = angulo m = angulo n per constructionem. Ergo chorda ab = bc = cd = de = ef = fa, siehe den zwölften Lehrsatz Fig. 18. Ergo triangulum agb = triangulo bgc = triangulo cgd = triangulo dge = triangulo egf = triangulo fga. Welches zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also sind alle Triangel eines regulären Vielreckes einander ähnlich und gleich, und derohalben darf man nur einen Triangel berechnen, und solchen durch die Seiten des Vieleckes multipliciren, wenn man den Flächeninhalt eines regulären Vieleckes wissen will.

Zweyter Zusatz.

Also sind auch alle Centriwinkel in einem solchen regulären Vielecke einander gleich.

Dritter Zusatz.

Da also ein gleichseitiges Vieleck aus gleichen und ähnlichen Dreyecken bestehet, die entweder gleichseitig sind, wie das Sechseck, oder gleichschenklicht, wie das Fünf-, Sieben-, Acht-, Neuneck u. s. w., so sind auch derselben respektive Winkel an der Basi einander gleich.

Vierter Zusatz.

Wenn man den Polygonwinkel eines regulären Vielecks wissen will, so darf man nur den Centriwinkel von 180 Grad abziehen, so ist die Differenz der verlangte Polygonwinkel.

Hundert vier und dreyßigster Lehrsatz.

Alle reguläre, das ist, gleichseitige ähnliche Vielecke abcde und fghik verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate aeml und fkon ihrer gleichnamigen Seiten ae und fk.

Beweis.

T. XLIII. Fig. 170. ac = ec, fh = kh; ae verhält sich zu ac, wie fk zu fh; ergo triangulum ace ∽ triangulo fhk. ce verhält sich zu ed, wie hk zu ki, und ed verhält sich zu dc, wie ki zu ih; ergo triangulum ced ∽ triangulo hki; et ergo trapezium acde ∽ trapezio fhik; et ergo verhält sich das Trapezium acde zum Trapezio fhik, wie der Triangel ace zum Dreyeck fhk. Welches das erste war.

Das Trapezium acde verhält sich zum Trapezio fhik, wie das Dreyeck acb zum Dreyeck fhg. ae verhält sich zu fk, wie em zu ko, oder ae verhält sich zu em, wie fk zu ko. Das Quadrat aeml verhält sich zum Drey-

eck ace, wie das Quadrat fkon zum Dreyeck fhk; ergo verhält sich das Quadrat aeml zum Quadrat fkon, wie das Dreyeck ace zum Dreyeck fhk; et ergo verhält sich das reguläre Fünfeck abcde zum Quadrat aeml, wie das reguläre Fünfeck fghik zum Quadrat fkon. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Hundert fünf und dreyßigster Lehrsatz.

Wenn man ähnliche Multangula regularia vel irregularia auf die Seiten ab, bc, ca eines rechtwinklichten Dreyecks abc construiret, so ist dasjenige das größte, welches dem rechten Winkel x gegenüber stehet.

Beweis.

Da sich, laut vorhergehendem 134. Lehrsatze, die ähnlichen Vielecke verhalten, wie die Quadrate ihrer Basium, so ist auch das Quadrat acuw = den beyden Quadraten aqrb + bstc zusammengenommen, denn der Winkel x ist ein rechter Winkel, und in einem jeden rechtwinklichten Dreyeck ist das Quadrat der Hypothenuse allezeit so groß, als das Quadrat der Basis und Cathete zusammengenommen, siehe den 120sten Lehrsatz Fig. 155. Das Quadrat abrq ist = dem Quadrat bcst; quadratum acuw = quadrato aqrb + quadrato bstc. ab = bc, ad T. XLIV. Fig. 171.

= ab, ad = cl, ergo cl = bc; et ergo hexagonum adefgb = hexagono bhiklc. ac = am; ergo verhält sich das große Sechseck acponm auf ac zum Sechseck adefgb auf ab, wie das Quadrat acwu auf ac zum Quadrat bstc auf bc; et ergo hexagonum acponm = hexagono adefgb + hexagono bhiklc. Welches zu beweisen war.

Hundert sechs und dreyßigster Lehrsatz.

Ein jedes gleichseitiges reguläres Vieleck abcdef wird, wenn man die Polygonwinkel h + i, k + l, m + n, o + p, q + r, s + t durch gerade Linien ad, fc, eb halbiret, in gleichseitige oder gleichschenklichte Triangel getheilet, welche alle einander gleich sind, und folglich alle einander decken.

Beweis.

T. XLIV. Fig. 172. Die Radii ga, gb, gc, gd, ge, gf sind alle einander gleich, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 59.; denn alle Radii eines Zirkels sind einander gleich. af = fe = ed = dc = cb = ba per constructionem. Ergo angulus h + i = angulo k + l = angulo m + n = angulo o + p = angulo q + r = angulo s + t, und weil diese Peripheriewinkel alle einander gleich sind, so sind auch die halben Peripheriewinkel h = i, k = l, m = n, o = p, q = r, s = t

einander

einander gleich; ergo haben auch die Centriwinkel einerley Maaß; demnach ist der Winkel u = v, der Winkel v = w, der Winkel w = x, der Winkel x = y, der Winkel y = z, der Winkel z = u et ergo triangulum a g f = et ∽ triangulo f g e = et ∽ triangulo e g d = et ∽ triangulo d g c = et ∽ c g b = et ∽ triangulo b g a. Welches zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Wenn man die Polygonwinkel h + i, k + l, m + n, o + p, q + r, s + t durch die geraden Linien a g, b g, c g, d g, e g, f g halbiret, so treffen solche alle im Centro g zusammen.

Zweyter Zusatz.

Wenn man aus diesem Punkte g mit der Länge g a einen Zirkel um die Figur herumziehet, so wird solcher alle Winkel des Vieleckes berühren.

Dritter Zusatz.

Die Seiten eines regulären Fünfecks sind größer, als der Semidiameter des um selbige Figur beschriebenen Zirkels; die Seite eines regulären Sechsecks ist desselben Halbmesser gleich, und die Seiten derjenigen regulären Vielecke, so mehr als sechs Seiten haben, sind kleiner, als der Radius desselben Zirkels.

Vierter Zusatz.

Also sind alle um ein reguläres Vieleck gezogene Zirkel größer, als das Vieleck selbsten.

Fünfter Zusatz.

Je mehr ein reguläres Vieleck Seiten hat, desto näher kömmt es dem um selbiges Vieleck umschriebenen Zirkel.

Hundert sieben und dreyßigster Lehrsatz.

Alle irregulären Flächen e ☉ f h ♂ g und i z k m ♄ l, welche zwischen zweyen oder mehrern Parallelen a b, p w, c d u. s. w. dergestalt liegen, daß, wenn man in jede zwey Perpendikularen e f, g h und i k, l m in egaler Distanz weit von einander ziehet, die von diesen Parallelen abstehenden Punkte ☉, ♂. mit &, ☽. und ♃, ♄. mit ☿, ♀. in gleicher Entfernung abstehen, sind einander gleich.

Beweis.

T. XLV. Fig. 173. Die krumme Linie e ☉ ☉ ☉ f stehet vom Perpendikel e f mit allen ihren Punkten so weit ab, als die krumme Linie i ♃ ♃ ♃ k vom Perpendikel i k absteht; die Perpendikularen e f, g h behalten mit den Perpendikularen i k, l m gleiche Distanz, das ist: $eg = il, fh = km$ und die krumme Linie g ♂ ♂ ♂ h ist in allen Punkten vom Perpendikel

dikel g h so weit entfernet, als die krumme Linie l ♄ ♄ ♄ m vom Perpendikel l m mit ihren Punkten entfernet ist, das ist: ☉ ist von & so weit, wie ♃ von ☿ entfernet, und ☽ stehet von ♂ so weit, wie ♀ von ♄ ab; folglich sind auch die Distanzen ☉ ♂ den Distanzen ♃ ♄ gleich; et ergo ist die irreguläre Figur e ☉ f h ♂ g = der irregulären Figur i ♃ k m ♄ l. Welches zu beweisen war.

Hundert acht und dreyßigster Lehrsatz.

Eine jede geradlinigte Fläche a b c d e f g formiret durch ihren Perimeter zweymal so viel rechte Winkel, als selbige Seiten hat, weniger viere.

Beweis.

Man nehme einen willkührlichen Punkt h ungefähr in der Mitte der Figur a b c d e f g an, und ziehe aus solchen gegen alle Winkel die geraden Linien h a, h b, h c, h d, h e, h f, h g, so bekömmt man sieben Triangel, als: 1) a h b, 2) b h c, 3) c h d, 4) d h e, 5) e h f, 6) f h g, 7) g h a, welche alle (weil jeder Triangel 180 Grade zu seinem Inhalte hat, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 40.) 1260 Grade betragen. Da nun aber die beym angenommenen Centro h befindlichen Winkel i, k, l, m, n, T. XLV. Fig. 174.

o, p vier rechten Winkeln gleich sind, so restiren, wenn man selbige Summe von obigen 1260 Graden abziehet, 900 Grad für die Summe der Figurwinkel r + s + t + u + v + w + x + y + z + ☉ + ☽ + ♂ + ☿ + q. Welches das erste war.

Die Figur abcdefg hat sieben Winkel, als erstens: r + s, zweytens: t + u, drittens: v + w, viertens: x + y, fünftens: z + ☉, sechstens: ☽ + ♂, siebentens: ☿ + q, also sollen diese sieben Figurwinkel 14 rechte Winkel weniger viere, das ist, zehn rechte Winkel, halten, welches 900 Grade beträgt, deren Summe, laut dem ersten Theile dieser Demonstration, allbereits durch die Arithmetik gefunden, und also dieser Lehrsatz klar ist. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Zusatz.

Die Figurwinkel eines Viereckes sind in Summa 360 Grad, eines Fünfeckes 540 Grade, eines Sechseckes 720 Grade u. s. w., und so wachsen bey jeder neuen Seite eines regulären Vieleckes zwey rechte Winkel zu.

Hundert neun und dreyßigster Lehrsatz.

In einem jeden regulären oder irregulären Vieleck abcdef sind die äußern Winkel n, o,

p,

p, q, r, s, so durch Verlängerung der Seiten af gegen m, fe gegen l, ed gegen k, dc gegen i, cb gegen h, und ba gegen g entstehen, allezeit 360 Grad.

Beweis.

Es ist im vorhergehenden 138sten Lehrsatze Fig. 174. gezeigt worden, daß die Polygonwinkel eines regulären oder irregulären Vieleckes, zusammengenommen, doppelt so viel rechte Winkel, als das Vieleck Seiten hat, weniger 360 Grade betragen. Da man nun durch die Verlängerung der Seiten jeden Figurwinkel 180 Grade groß macht, so betragen die in gerade Linien verwandelten 6 Winkel u + p, v + q, w + r, x + s, y + n, t + o 1080 Grade. Da nun die Figurwinkel eines Sechseckes, laut dem hundert acht und dreyßigsten Lehrsatze, nur 720 Grade betragen, so ist klar, daß die äußern Winkel n, o, p, q, r, s nur 360 Grade, oder vier rechte Winkel, halten. Welches zu beweisen war. T. XLV. Fig. 175.

Anmerkung.

Dieser Lehrsatz ist sehr nützlich, um die Probe zu machen, ob man die Winkel auf dem Felde accurat abgenommen habe oder nicht; denn wenn man die Figur zu Papiere gebracht, so suche man zu jedem Winkel den äußern, indem man den gemessenen von 180 Graden subtrahiret, so machen selbige hernach alle in

Summa 360 Grade aus, und wenn dieses ist, so ist richtig gemessen worden; betragen sie aber nicht so viel, oder auch mehr, so ist ein Fehler vorgegangen, welchen man durch neues Nachmessen suchen muß.

Hundert und vierzigster Lehrsatz.

Ein jedes reguläres Vieleck a b c d e ist gleich einem Triangel a i r, dessen Basis a r = dem Perimeter des Vieleckes a b c d e, und dessen Höhe k i = dem Perpendikel f g des Dreyecks a f b.

Beweis.

T. XLVI. Fig. 176. Die Seite a b = der Seite b c = c d = d e = e a per constructionem; der Radius f a = f b = f c = f d = f e = f a, denn alle Radii eines Zirkels sind einander gleich; ergo triangulum a f b = triangulo b f c = trigono c f d = triangulo d f e = dem Dreyeck e f a. Welches das erste war.

a h = a b, a i = a f, h i = b f, et g f = k i. Ergo triangulum a i h = et ∽ triangulo a f b. Welches das zweyte war.

a h = a b = h l, a i = h m, h i = l m. Ergo triangulum h m l = triangulo a i k, l n = h l, l o = h m, n o = l m; ergo triangulum l o n = triangulo h m l, n p = l n, n q = l o, p q = n o; ergo triangulum n q p = triangulo l o n, p r = n p,

p s

ps = nq, rs = pq; ergo trigonum psr = trigono nqp; et ergo triangulum aih = triangulo hml = trigono lon = trigono nqp = triangulo psr. Welches das dritte war.

Et ergo triangulum aih + triangulo hml + trigono lon + triangulo nqp + trigono psr = pentagono abcde. Welches das vierte war.

lh = ha, ki = ki; ergo triangulum hml = triangulo hil, siehe den 73sten Lehrsatz Fig. 100.; et triangulum ail = triangulo afb + bfc, ln = ah, ki = ki; ergo triangulum lin = triangulo aih; et ergo triangulum ain = triangulo afb + bfc + cfd, np = ah, ki = ki; ergo triangulum nip = triangulo aih; et ergo triangulum aip = triangulo afp + bfc + cfd + dfe, pr = ah, ki = ki; ergo triangulum pir = triangulo aih; et ergo triangulum air = triangulo afb + bfc + cfd + dfe + efa, vel triangulum air = pentagono abcde. Welches das fünfte und zu beweisen war.

Zusatz.

Wenn man demnach in einem Zirkel so viele Radios ziehen wollte, als nur möglich wäre, so würden unendlich viele kleine Sectores daraus entstehen, deren Höhen endlich mit dem Radio über-

übereinkommen würden; daher ist der Zirkel einem Triangel gleich, dessen Basis so groß, als die Peripherie ist, die Höhe aber = dem Radio. Und derohalben ist der Sector eines Zirkels gleich einem Dreyeck, dessen Grundlinie = dem Bogen, die Höhe aber = dem Radio, siehe vorhergehenden 140sten Lehrsatz, item Wolfs Anfangsgründe der Geometrie § 161.

Viertens von der Zirkellinie.

Hundert ein und vierzigster Lehrsatz.

Alle Zirkel abcdef geben so viel gleichschenklichte Dreyecke fga, agb, bgc, cgd, dge, egf, als in wie viele reguläre Theile man selbige eingetheilet hat, deren Grundlinien ah, hi, ik, kl, lm, mn gleich sind den Seiten ab, bc, cd, de, ef, fa des Vieleckes abcdef, die Höhe ro vel xp aber gleich ist dem Radio ga.

Beweis.

T. XLVI. Fig. 177. Da ein Sechseck abcdef gleich ist dem Zirkel, in welchem solches beschrieben worden, weniger den Abschnitten, das ist, dem Raum, welcher zwischen den Chorden ab, bc, cd, de, ef, fa und derselben Bogen enthalten, so nehme man zum Exempel den Triangel mqn für den Triangel egf an, weil mq = eg, und qn = gf, und

und der Winkel q = dem Winkel y. Ergo ist der Triangel mqn = dem Triangel egf; den Ueberschuß, oder die beyden kleinen Dreyecke mqp und nqp aber, welche neben dem Triangel mqn stehen, nehme man für ein Segmentum an, so wird man finden, daß das Dreyeck mpn beynahe = dem Sectori feg seyn wird. Welches zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also sind auch die übrigen Dreyecke 1. 2. 3. 4. 5. gleich den Sectoribus I. II. III. IV. V.

Zweyter Zusatz.

Je kleiner die Theile eines Zirkels genommen werden, desto näher kommen die Triangel den Ausschnitten des Zirkels.

Hundert zwey und vierzigster Lehrsatz.

Der Diameter ab des Zirkels acbd verhält sich zu seiner Circumferenz, wie 7 zu 22 beynahe, oder genauer, wie 100 zu 314.

Beweis.

Man theile den Diameter ab des Zirkels acbd in sieben, oder hundert gleiche Theile, so werden Tab. XLVII. Fig. 178.

werden sich zwey und zwanzig, oder dreyhundert und vierzehn solcher sieben oder hundert Theile in der Peripherie des Zirkels befinden. Da nun die kleinen Bogen der 22 oder 314 Theile beynahe für gerade Linien anzunehmen sind, so verhält sich auch der Diameter ab zu seinem Zirkel acbd beynahe, wie 7 zu 22. Welches zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Da nun alle Zirkel einander ähnlich sind, siehe den ersten Band, und in selbigem die 169ste Erklärung Fig. 165. 166., so verhält sich auch jeder Diameter zu seiner Circumferenz beynahe, wie 7 zu 22.

Zweyter Zusatz.

Wenn also die Peripherie eines Zirkels gegeben wird, so läßt sich der Diameter desselben leicht dazu finden.

Dritter Zusatz.

Also läßt sich leicht ein reguläres Eilfeck sowohl in einem Zirkel, als auch auf einer gegebenen Linie, construiren.

Vierter

Vierter Zusatz.

Man kann also auch leicht einen Zirkelbogen in eine gerade Linie, und hinwiederum eine gerade Linie in einen Zirkelbogen, verwandeln.

Hundert drey und vierzigster Lehrsatz.

Die große Zirkelperipherie abcd stehet in Proportion zur kleinern Zirkelperipherie efgh, wie der Radius ia zum Radio ie, oder auch, es verhält sich der Zirkel abcd zu seinem Radio ia, wie sich verhält der Zirkel efgh zu seinem Radio ie.

Beweis.

Wenn man zum Exempel die beyden Radios ia und il in die zwey Zirkel abcd und efgh dergestalt ziehet, daß die Zwischendistanz unendlich klein, und also die Bogen ke und al fast vor gerade Linien anzusehen sind: denn man ziehe aus n und m nach a und e die Tangenten na und ne, so werden solche mit den kleinen Theilen oder Bogen al und ek gerade Linien nla und mke machen, so auf ia und ie in a und e winkelrecht aufstehen; also sind die Winkel iem und ian rechte Winkel, und folglich einander gleich. Der Winkel i am gemeinschaftlichen Centro beyder Zirkel abcd und efgh ist gemeinschaftlich bey- Tab. XLVII. Fig. 179.

den

den Triangeln ail und eik; ergo ist der kleinste Triangel kie ∽ dem Triangel lia; ergo verhält sich ek zu al, wie ki zu li; et ergo verhält sich auch ke zum Zirkel efgh, wie la zum Zirkel abcd, oder auch, es verhält sich der Bogen ke zum Bogen al, wie der Zirkel efgh zum Zirkel abcd; derohalben verhält sich auch der Zirkel efgh zum Zirkel abcd, wie der Radius ie zum Radio ia. Welches zu beweisen war.

Zusatz.

Also kann man leicht einen Zirkel beschreiben, welcher mit einem andern gegebenen in gewisser Proportion stehen soll.

Hundert vier und vierzigster Lehrsatz.

Tab. XLVII. Fig. 179. Jeder Zirkel bcde ist gleich einem Dreyeck aef, dessen Basis ef = dem Perimeter des Zirkels ebcd, die Höhe aber = dem Radio ac.

Beweis.

Tab. XLVII. Fig. 180. Der Diameter cd verhält sich zur Peripherie bced beynahe, wie 7 zu 22, siehe den hundert zwey nnd vierzigsten Lehrsatz Fig. 178.; ergo cd = beynahe $\frac{1}{3}$ decb, ei = cd, ei = ih = hg; ergo eg = 3, cd = decb weniger $\frac{1}{7}$ cd, oder weniger $\frac{1}{22}$ decb; gf = $\frac{1}{7}$ cd oder

oder $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$ decb; ergo ef = der ganzen Peripherie bced; et ae = ad = ac = Radio circuli bced. Welches das erste war.

Man theile ferner die Peripherie ecbd in 100 gleiche Theile, und trage selbige auf die gerade Linie ef, so ist ef noch näher der Peripherie des Zirkels bced, denn je kleiner die Bogen eines Zirkels sind, desto näher kommen selbige der geraden Linie, siehe den 143sten Lehrsatz Fig. 179. Welches das zweyte war.

Ferner ziehe man aus a in Gedanken nach allen hundert auf der geraden Linie ef befindlichen Theilungspunkten gerade Linien, so bekömmt man auf der geraden Linie ef hundert kleine gleiche Triangel, denn sie haben alle einerley Höhe und gleichgroße Bases per constructionem, siehe den 141sten Lehrsatz Fig. 77.; item ziehe man auch aus dem Centro a auf alle in der Peripherie des Zirkels bced befindliche hundert Theilungspunkte hundert Radios, dadurch bekömmt man hundert gleichgroße Sectores oder Triangel, welche alle den auf ef befindlichen hundert Triangeln gleich seyn werden, denn sie haben alle gleichlange Bases per constructionem und gemeinschaftliche Höhe ae. Welches das dritte war.

Da nun das eingebildete Dreyeck im Zirkel ecbd mit denjenigen auf der geraden Linie ef

einerley Höhe haben, so sind sie alle zweyhundert einander gleich; et ergo ist der Triangel aef = dem Zirkel decb. Welches das vierte und zu beweisen war.

Hundert fünf und vierzigster Lehrsatz.

Die Zirkelflächen abcd und efgh verhalten sich unter einander, wie die Quadrate iklm und nopq ihrer Durchmesser rs und tu.

Beweis.

Tab. XLVII. Fig. 181.

Der Diameter rs verhält sich zum Zirkel abcd, wie sich verhält der Diameter tu zum Zirkel efgh. Ergo verhält sich auch der Diameter rs zum Diameter tu, wie sich verhält der Zirkel abcd zum Zirkel efgh. Welches das erste war.

Der Diameter rs ist = ik = lm; rs = vw; vw = il = km = rs. Der Diameter tu ist = no = pq; tu = xy; xy = np = oq = tu; ergo verhält sich der Diameter rs zum Quadrat iklm, wie sich verhält der Diameter tu zum Quadrat nopq. Welches das zweyte war.

Das Quadrat iklm verhält sich zum Quadrat nopq, wie der Zirkel abcd zum Zirkel efgh;

efgh; et ergo verhält sich der Zirkel abcd zu seinem Quadrat iklm, wie sich verhält der Zirkel efgh zu seinem Quadrat nopq. Welches das dritte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also verhalten sich auch die halben Drittheile, Viertheile, Fünftheile u. s. w. der Zirkel gegen einander, wie sich dessen Halbmesser gegen einander verhalten.

Zweyter Zusatz.

Also läßt sich auch aus dem Inhalte des Zirkels leicht der Inhalt des Quadrats von eben diesem Zirkel durch den Durchmesser finden.

Dritter Zusatz.

Also lassen sich die Zirkel leicht mit einander vergleichen.

Hundert sechs und vierzigster Lehrsatz.

Der Inhalt eines Sectoris acb, welcher von zweyen Radiis ca und cb und dem Bogen afb eingeschlossen ist, ist gleich einem Dreyeck, dessen Basis die Länge des Bogens afb, die Höhe

aber dem Radio cf gleich ist, siehe den 143sten Lehrsatz Fig. 179.

Beweis.

Tab. XLVII. Fig. 182.

Man nehme, wie im 143sten Lehrsatze erwähnet worden, einen so kleinen Theil af vom Bogen afb an, als nur möglich, so wird solcher, vermöge seiner Kürze, besonders in grossen Zirkeln, wo man die Peripherie in tausend und mehr Theile theilen kann, für eine gerade Linie gehalten werden können, und ist der Inhalt des Triangels acf = dem zwölften Theil des Sectoris acb, welcher Sector = zwölf Triangeln acf. Welches zu beweisen war.

Zusatz.

Folglich kann man leicht den Inhalt eines Sectoris acb finden, wenn man desselben Bogen afb mit dem halben Radio ca, oder cf, oder cb multipliciret.

Hundert sieben und vierzigster Lehrsatz.

Alle Zirkelausschnitte cab und fde, so am Centro a oder d gleiche Winkel r + p oder s + q haben, sind einander ähnlich; auch sind die Segmenta cibm und fken einander ähnlich, wenn

wenn sie ähnliche Sectores cmba und fned zu ihrem Maaße haben.

1. Beweis in Ansehung des Ausschnitts.

Der Winkel p ist = dem Winkel q, und der Winkel r ist = dem Winkel s; ergo ist der Winkel r + p = dem Winkel s + q. Welches das erste war.

Tab. XLVIII. Fig. 183.

Der Radius ab verhält sich zum Bogen bmc, wie der Radius ag zum Bogen goh; ac = ab, ah = ag, df = de, ah = df, ag = de; ergo verhält sich der Radius ab oder ac zum Bogen bmc, wie ag oder ah zum Bogen goh, oder wie de oder df zum Bogen enf. Welches das zweyte war.

ha = ag; der Winkel r + p ist sich selbsten gleich; ergo ist auch der Bogen cmb ∽ dem Bogen hog; et ergo ist der Sector cab ∽ dem Sectori hag. Welches das dritte war.

Die gerade Linie de ist = der geraden Linie ag, und df ist = ah; der Winkel r ist = dem Winkel s, und der Winkel p = dem Winkel q; ergo ist der Bogen hg = dem Bogen fe; et ergo ist der Sector edf ∽ dem Sectori gah ∽ dem Sectori bac. Welches das dritte und zu beweisen war.

2. Beweis in Ansehung des Abschnitts.

Der Winkel r + p ist = dem Winkel r + p; ergo verhält sich der Radius a g zum Bogen g o h, wie der Radius a b zum Bogen b m c; a h = d f, a d = d e; angulus r + p = angulo s + q; ergo segmentum e n f = segmento g h o ∽ segmento b m c. Welches das erste war.

Der Radius a g ist = dem Radio d e; der Winkel r + p ist = dem Winkel s + q; ergo ist die Chorde h g = der Chorde f e; et ergo ist das Segmentum h l o g = dem Segmento e k f n et ∽ dem Segmento b i c m. Welches das zweyte und zu beweisen war.

Erster Zusatz.

Also verhalten sich auch die Bogen von ähnlichen Ausschnitten, wie ihre Radii oder Chorden der Abschnitte.

Zweyter Zusatz.

Wenn man aus der Spitze a in dem Sectore c a b eine gerade Linie a m ziehet, so verhält sich alsdann auch der Sector m a b zum Sectore o g a, wie der Sector c a m zum Sectore h o a, und wenn man den Winkel s = dem Winkel r macht, so ist der Sector f d n = dem Sectori h a o und ∽ dem Sectori c a m; desgleichen ist sodann auch der

der Sector n d e = dem Sectori o a g und ∽ dem Sectori m a b.

Dritter Zusatz.

Folglich werden durch gleichgroße Winkel ähnliche Sectores, und durch ähnliche Sectores gleichgroße Winkel in den Zirkeln formiret.

Hundert acht und vierzigster Lehrsatz.

Der Inhalt des Zirkels a b k c d i verhält sich zum Quadrat e f g h seines Diameters i k beynahe, wie 785 zu 1000.

Beweis.

Jeder Diameter i k verhält sich zu seiner Peripherie a b c d, wie 100 zu 314, siehe den ersten Band Regul. Geometr. 100.; multiplicirt man aber die Peripherie a b c d durch $\frac{1}{4}$ Diameter i k, so bekömmt man den Inhalt des Zirkels a b k c d i, als: Tab. XLVIII. Fig. 184.

Peripherie a b c d = 314
$\frac{1}{4}$ des Diameters i k = 25

1570
628

Productum 7850 = dem Inhalt des Zirkels. Das Quadrat des Diameters

ters

ters als von 100 ist 10000; folglich verhält sich der Zirkel abcd zu dem Quadrat efgh seines Diameters ik, wie 7850 zu 10000. Welches zu beweisen war.

Hundert neun und vierzigster Lehrsatz.

Aehnliche in einem Zirkel abcde und fghik beschriebene Vielecke stehen in Proportion gegen einander, wie die Quadrate anol und fpqm ihrer beyderseitigen Diameter al und fm, oder auch wie die Quadrate adrs und fitu ihrer ähnlichen Chorden ad und fi.

Beweis.

Tab. XLVIII. Fig. 185. Der Winkel v ist = dem Winkel w; ab verhält sich zu bc, wie fg zu gh; ergo ist der Triangel abc ∽ dem Dreyeck fgh. Welches das erste war.

Der Winkel x ist = dem Winkel y; der Winkel ⊙ ist = dem Winkel x, und der Winkel ☽ ist = dem Winkel y. Weil ab ∽ fg, so ist auch der Winkel ⊙ = dem Winkel ☽. Welches das zweyte war.

Der Winkel lab ist = dem Winkel mfg; ergo verhält sich auch la zu ab, wie sich verhält mf zu fg; und wie sich verhält al zu fm, so verhält

verhält sich auch ab zu fg. Welches das dritte war.

ac verhält sich zu ad, wie hf zu fi; ergo ist das Quadrat alon, im Verhältniß gegen das Fünfeck abcde, wie das Quadrat fmqp zum Fünfeck fghik; und wie sich verhält das Quadrat alno zum Quadrat adrs, so verhält sich auch das Quadrat fmpq zum Quadrat fitu. Welches das vierte war.

Ergo verhält sich das Fünfeck abcde zum Quadrat adrs, wie sich verhält das Fünfeck fghik zum Quadrat fitu. Welches das fünfte und zu beweisen war.

Anmerkung.

Diese Beweise muß der lehrbegierige Leser suchen so viel als möglich dergestalt zu fassen, daß, wenn er um etwas gefragt wird, er sogleich reelle Antwort davon zu geben weiß, als zum Exempel, es wird gefragt: aus welchem Grunde man gewiß behaupten könne, daß ein reguläres Vieleck gleich sey einem Triangel, dessen Basis so lang als alle Seiten des Vieleckes zusammengenommen, die Höhe aber gleich dem aus dem Centro auf eine Seite des Vieleckes gefällten Perpendikel? so ist die fertige Antwort folgende:

Erstens: ein reguläres Vieleck hat so viel gleiche Triangel, als Seiten im Vielecke sind.

Zweytens: ihre Höhe ist der aus dem Centro auf eine Seite des Vieleckes gefällte Perpendikel.

Drittens: alle Triangel, welche gleiche Grundlinien und gleiche Höhe haben, sind einander gleich.

Viertens: da nun die Basis des Triangels so lang als alle Seiten des Vieleckes zusammengenommen, die Höhe aber gleich der Höhe eines Dreyeckes, so ist ein solches Dreyeck gleich dem gegebenen Vieleck.

Schlußerinnerung.

Ich habe gegen die Mitte dieses zweyten Bandes nachgelassen, die arithmetischen und geometrischen Regeln so oft anzuführen, theils um den Raum zu ersparen, theils aber auch, um das Gedächtniß des lehrbegierigen Lesers desto mehr zu schärfen, und um die vorgewesenen Regeln und Lehrsätze desto besser im Kopfe zu behalten, besonders aber auch, um desto eher zu erreichen das

Ende des zweyten Bandes.

Fig. X.

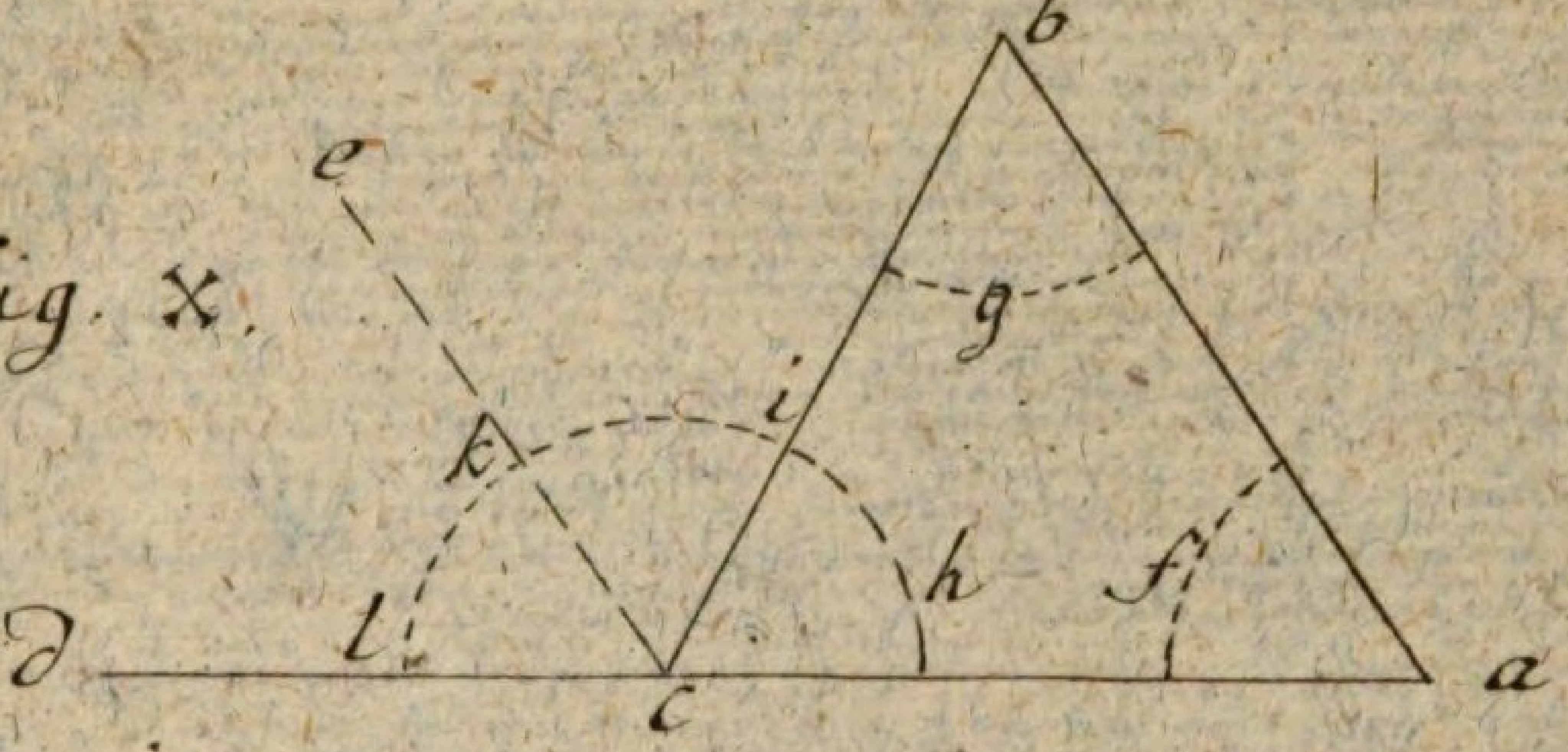


Fig. 1.

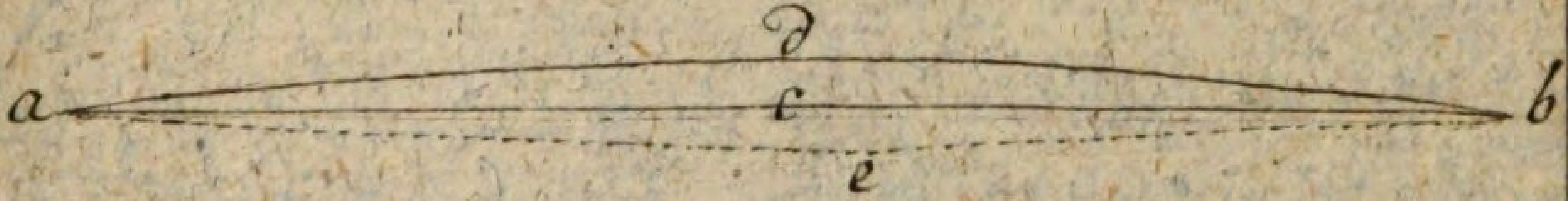


Fig. 2.

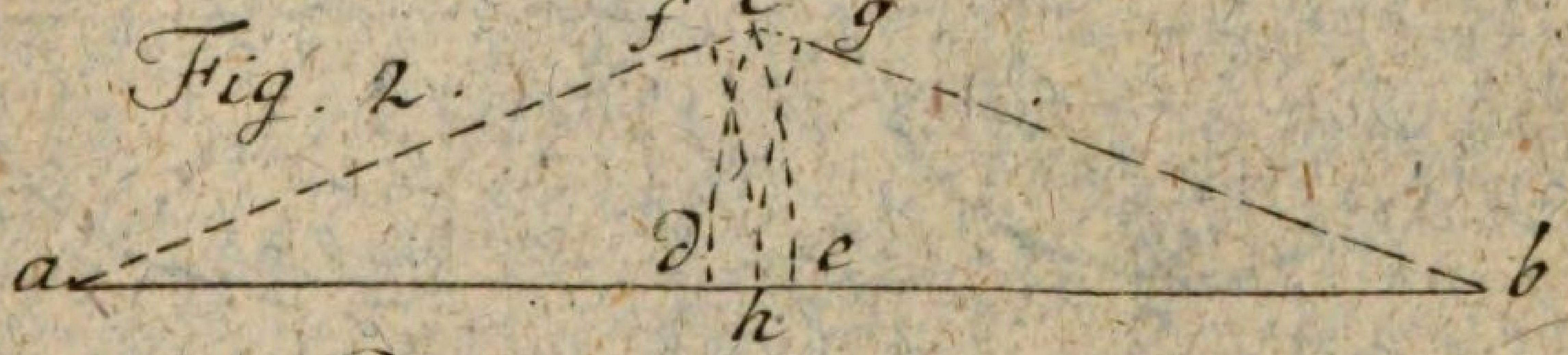


Fig. 3.

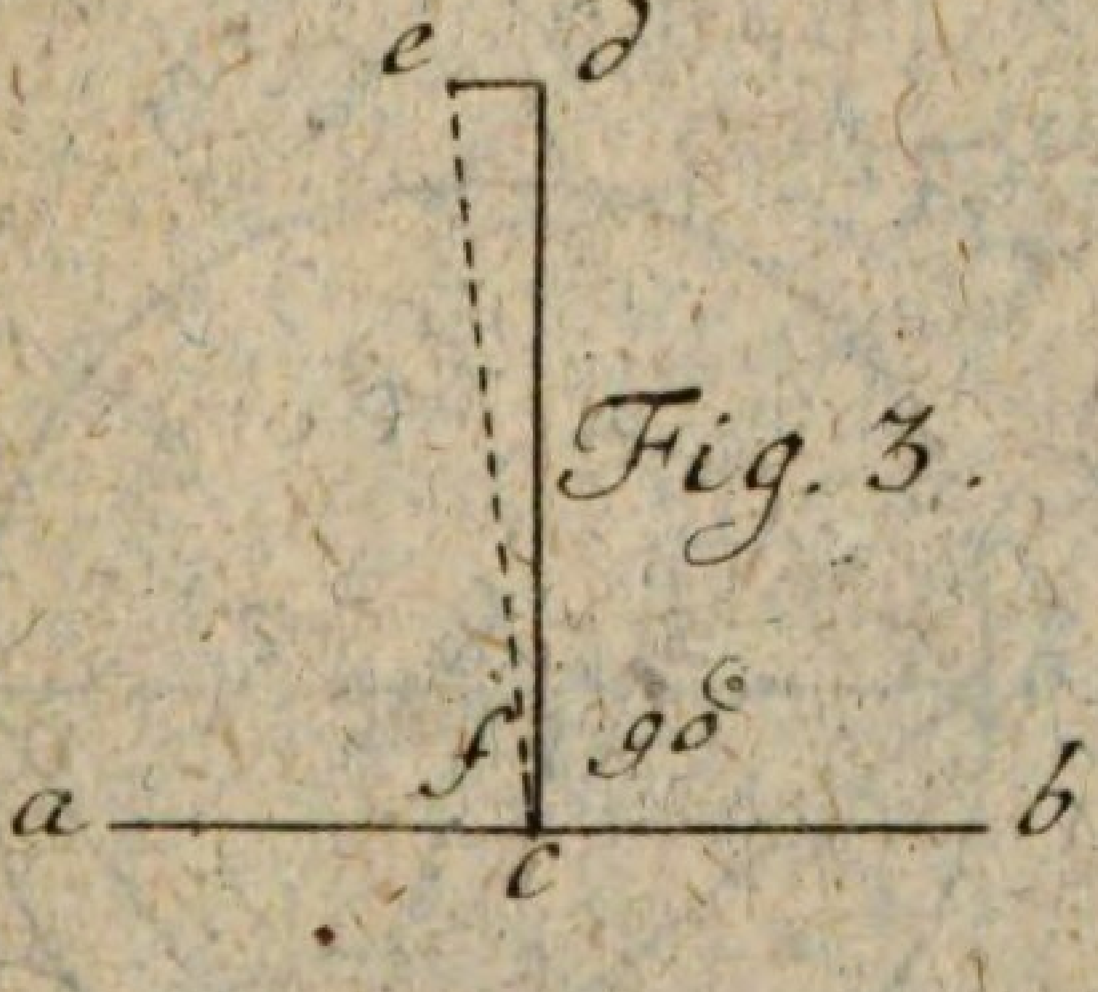


Fig. 4.

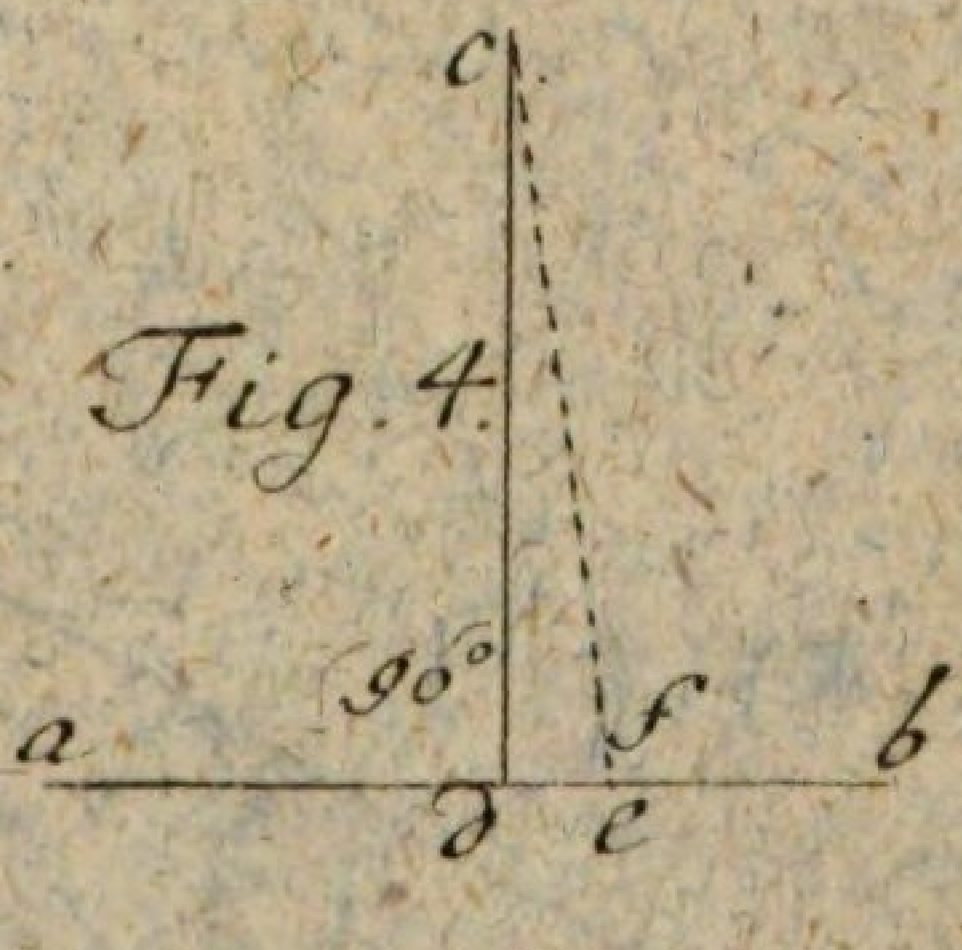
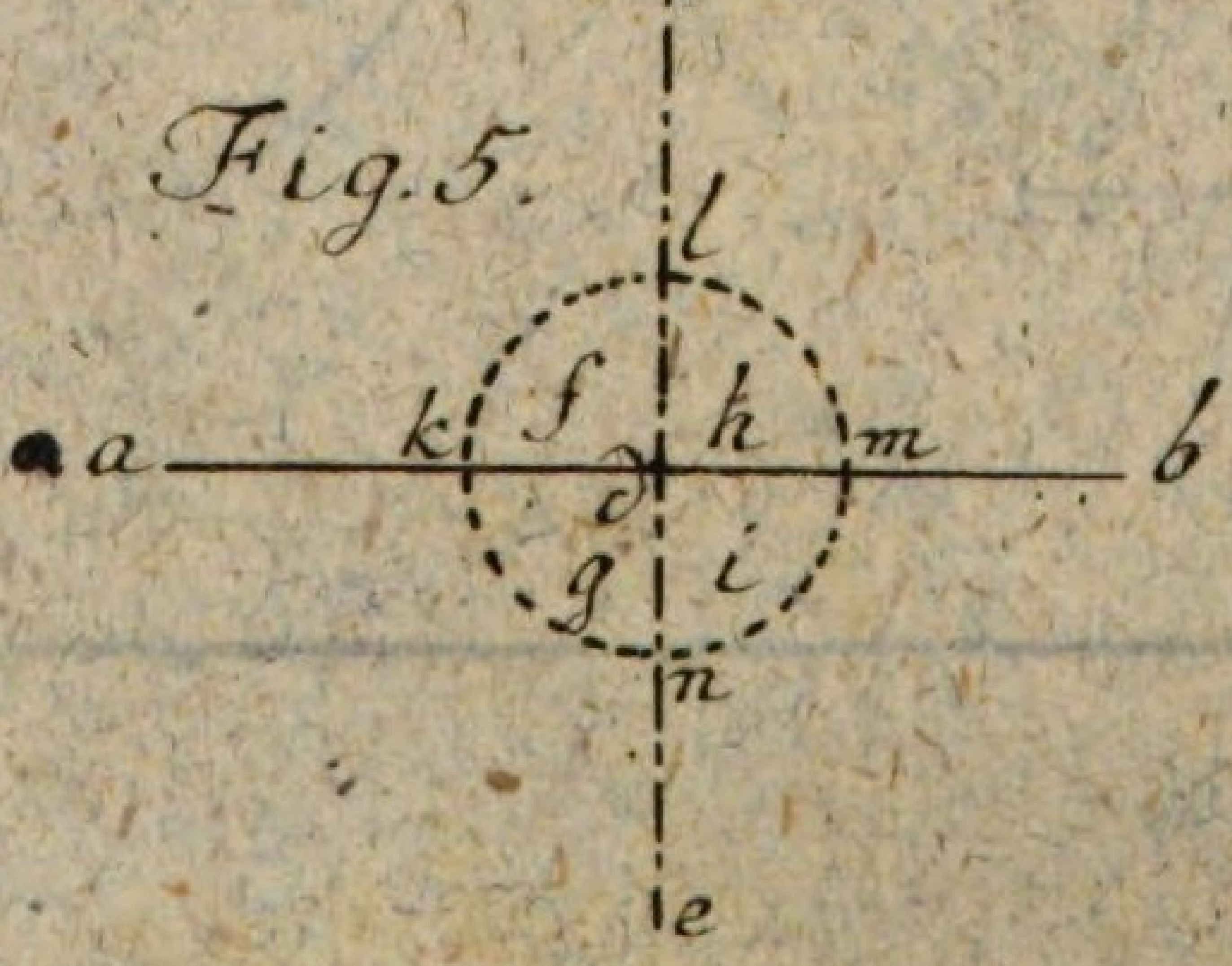


Fig. 5.



Tab. I.

Fig. 6.

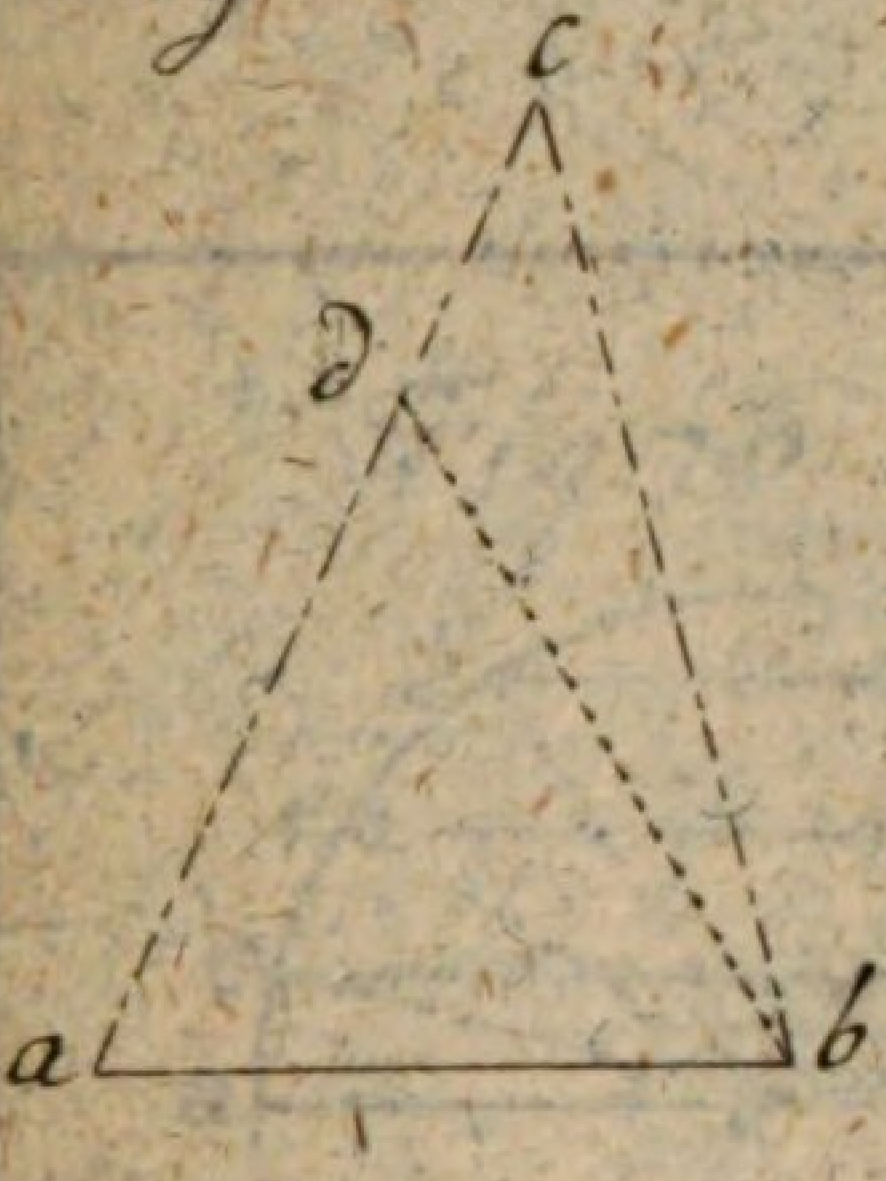


Fig. 7.

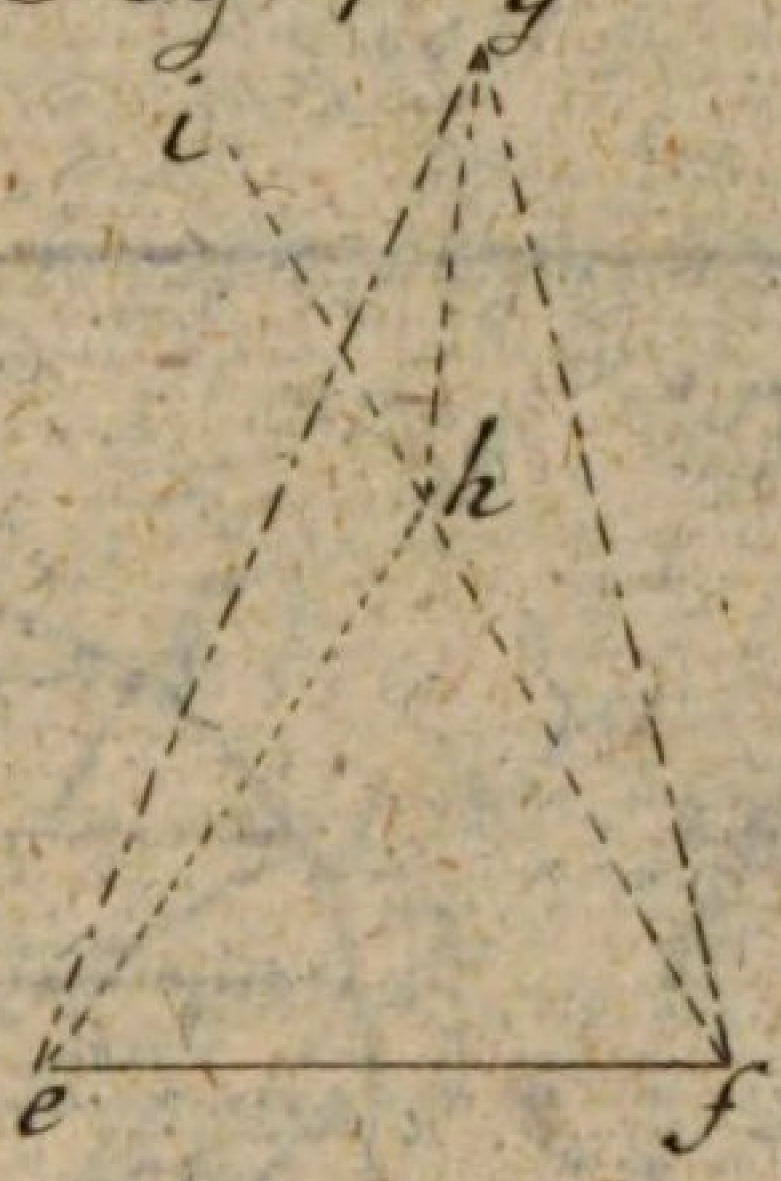


Fig. 8.

Fig. 9.

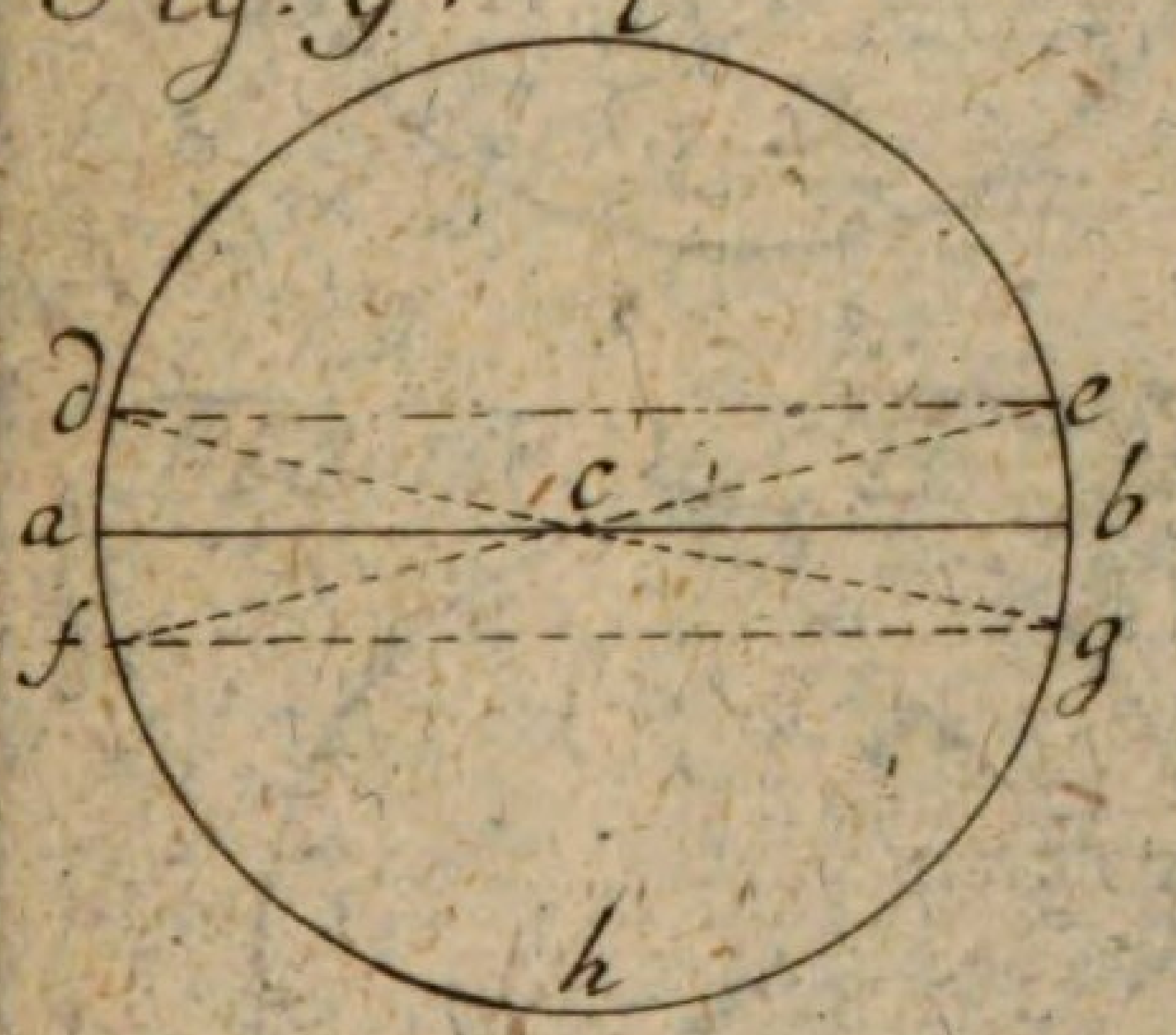


Fig. 10.

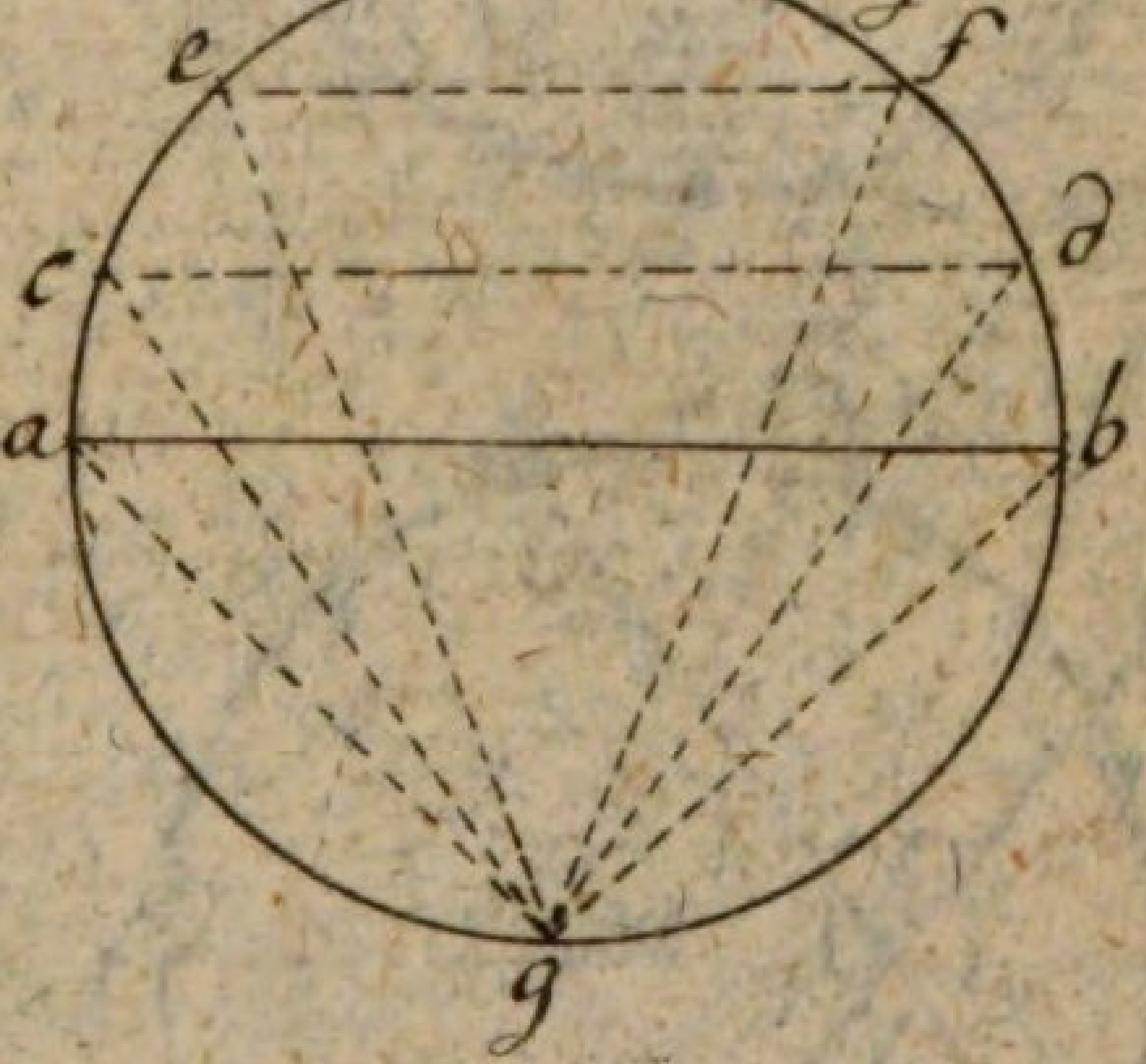


Fig. 11.

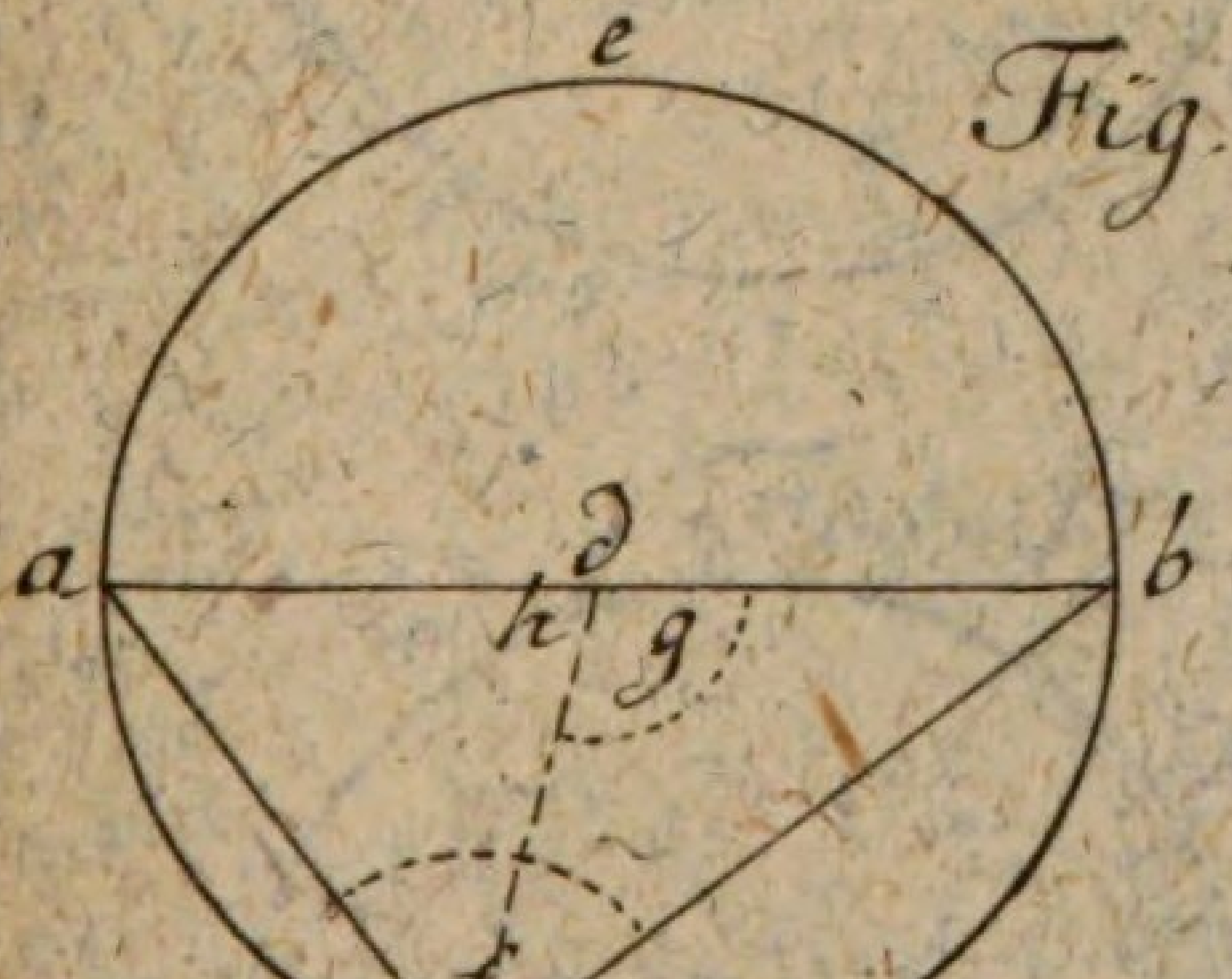
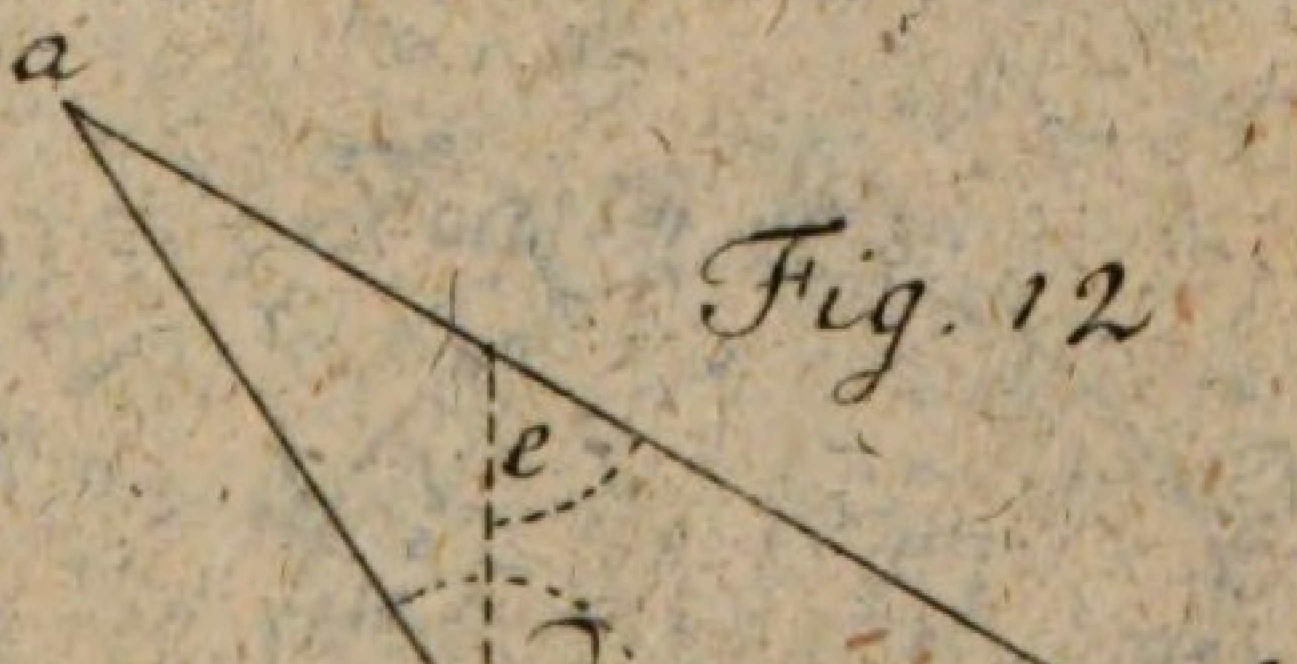


Fig. 12



Tab. II.

Fig. 13

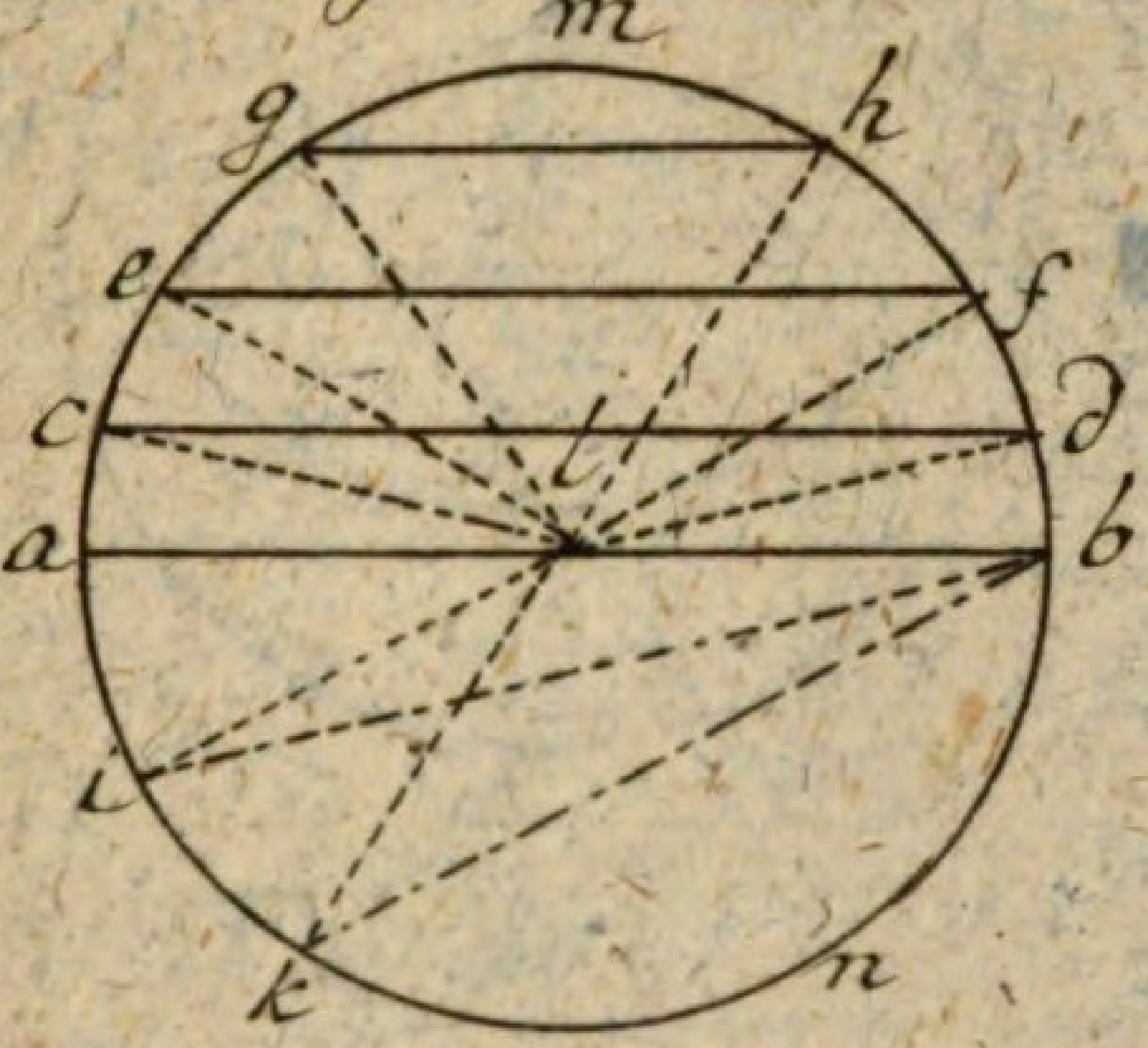


Fig. 14.

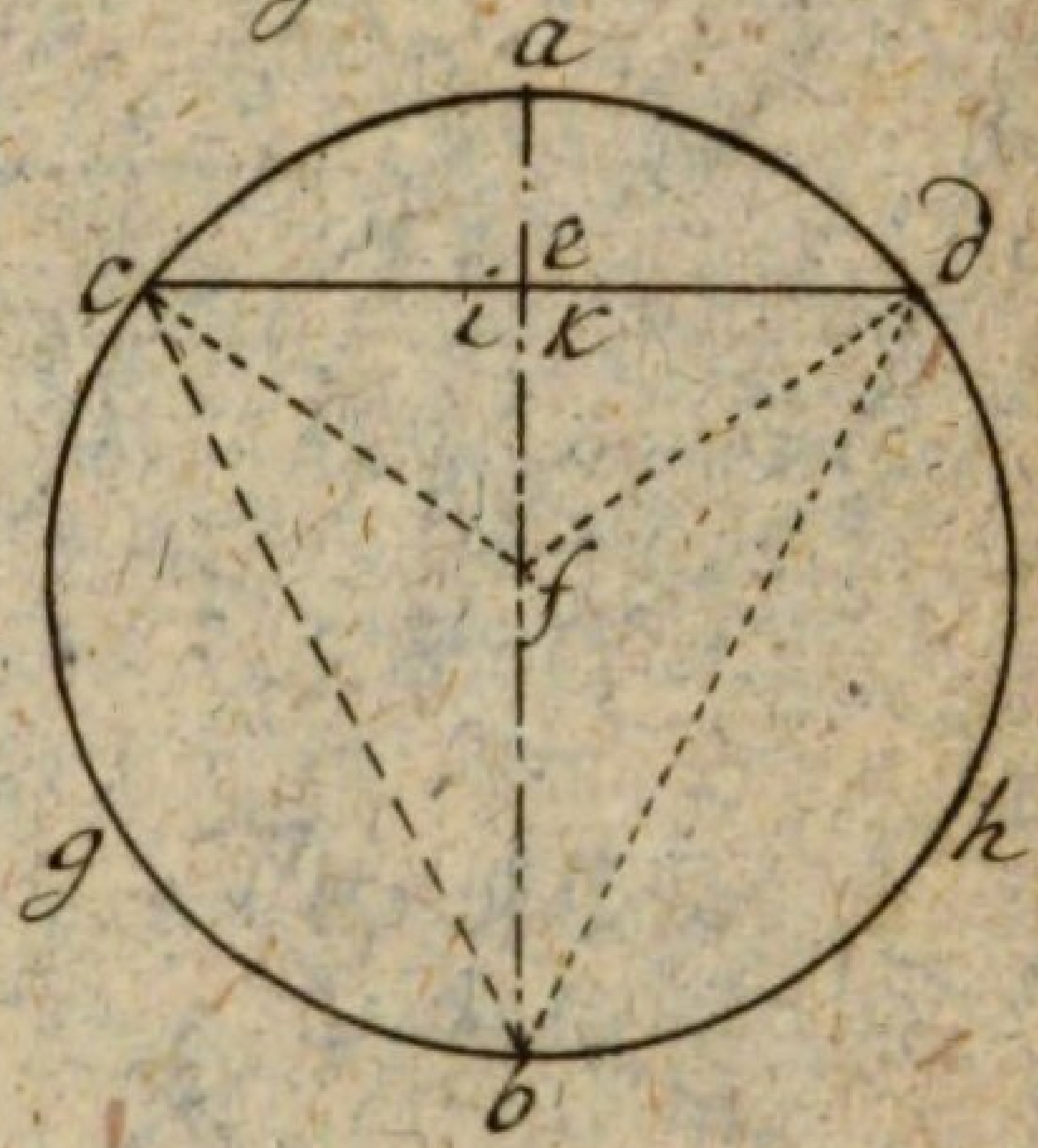


Fig. 15.

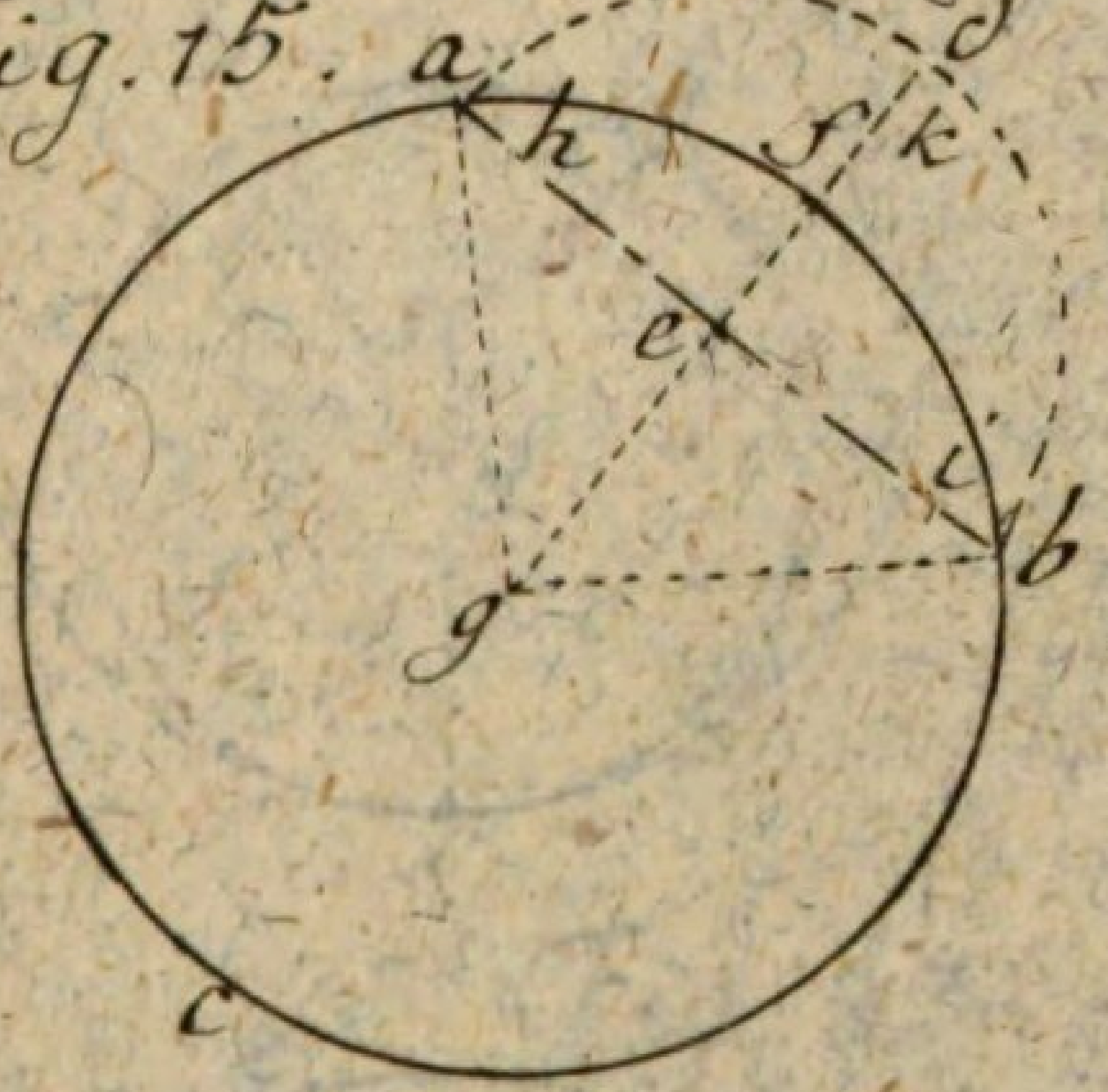


Fig. 16.

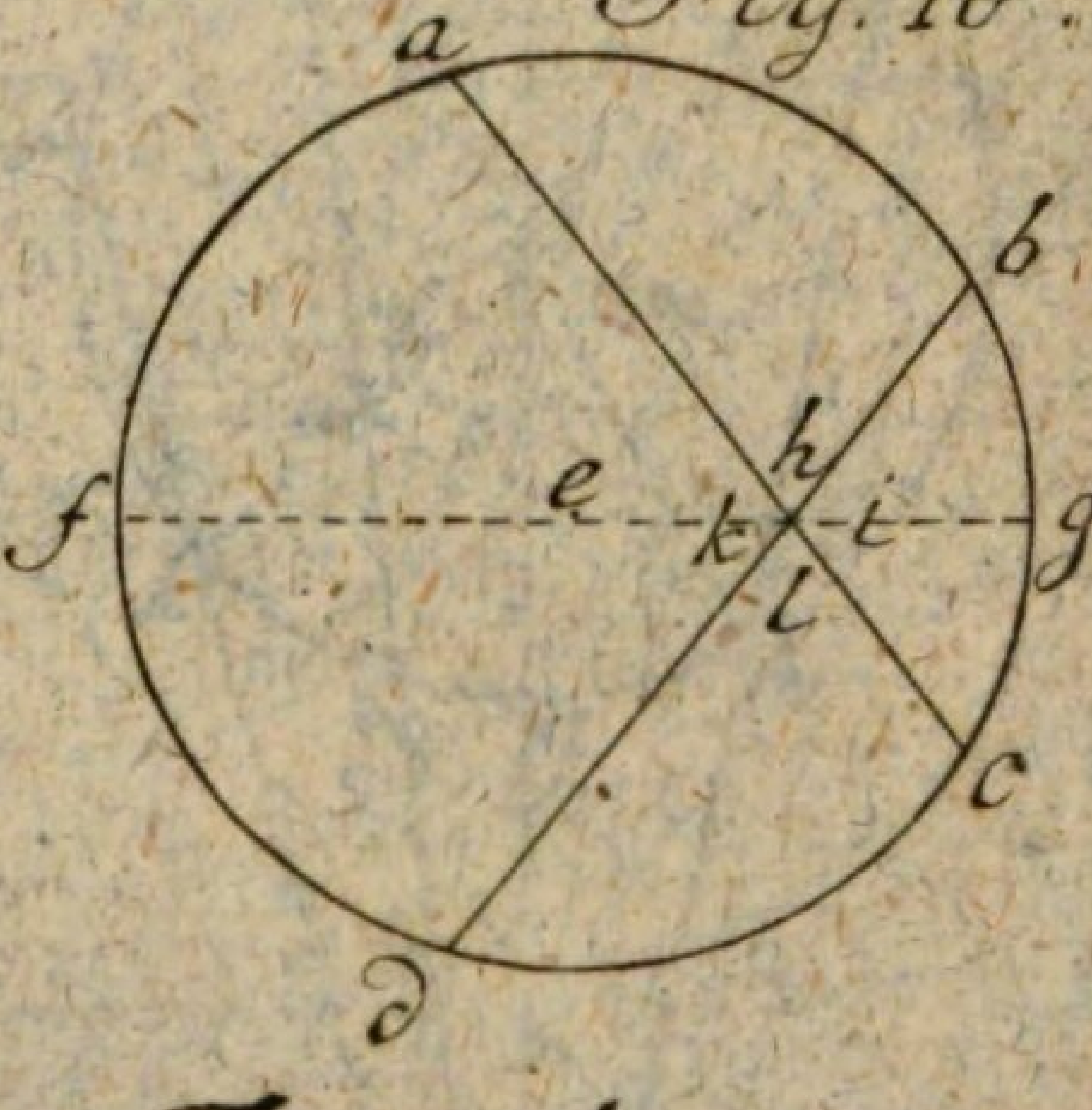
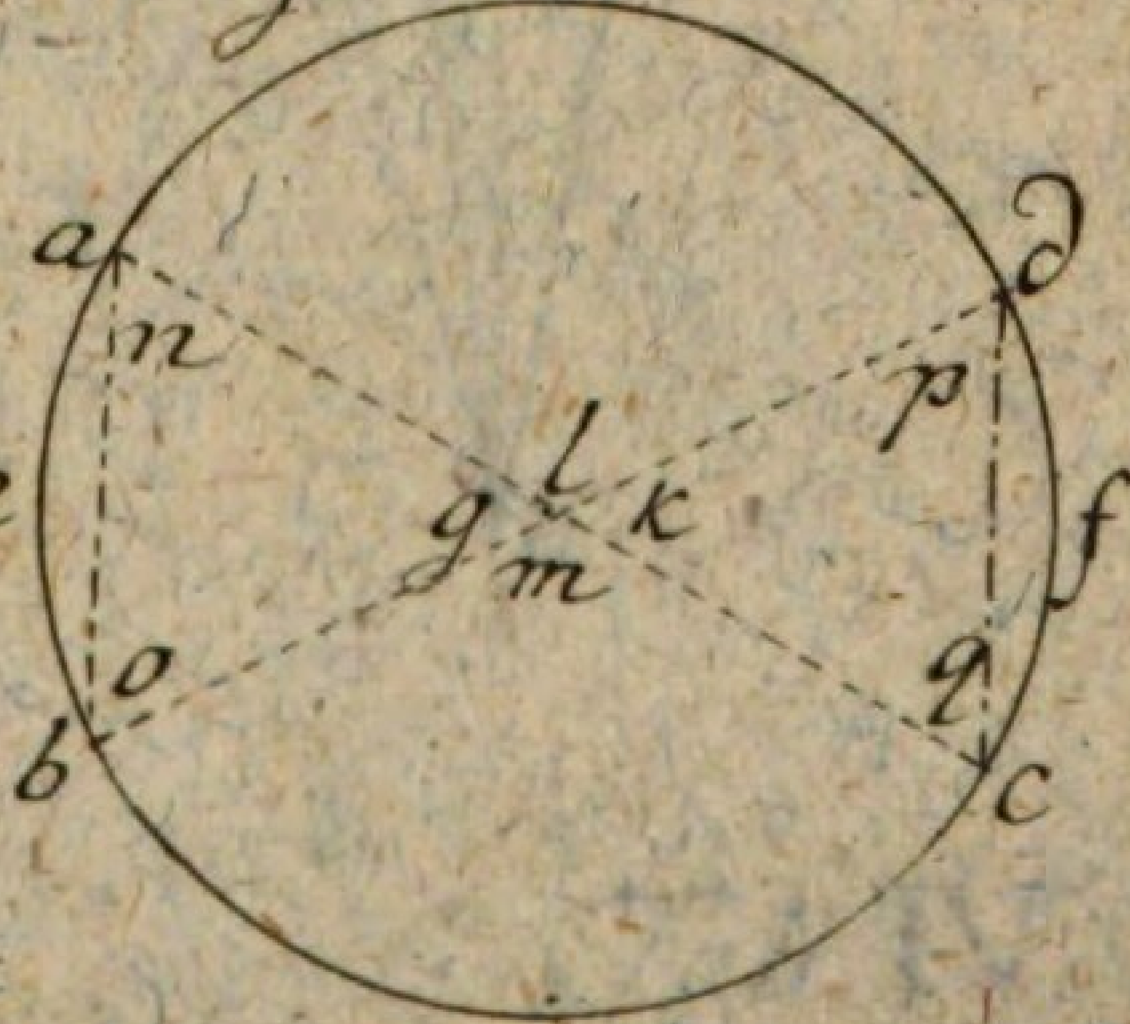


Fig. 17.

Fig. 18.



Tab. III.

Fig. 19.

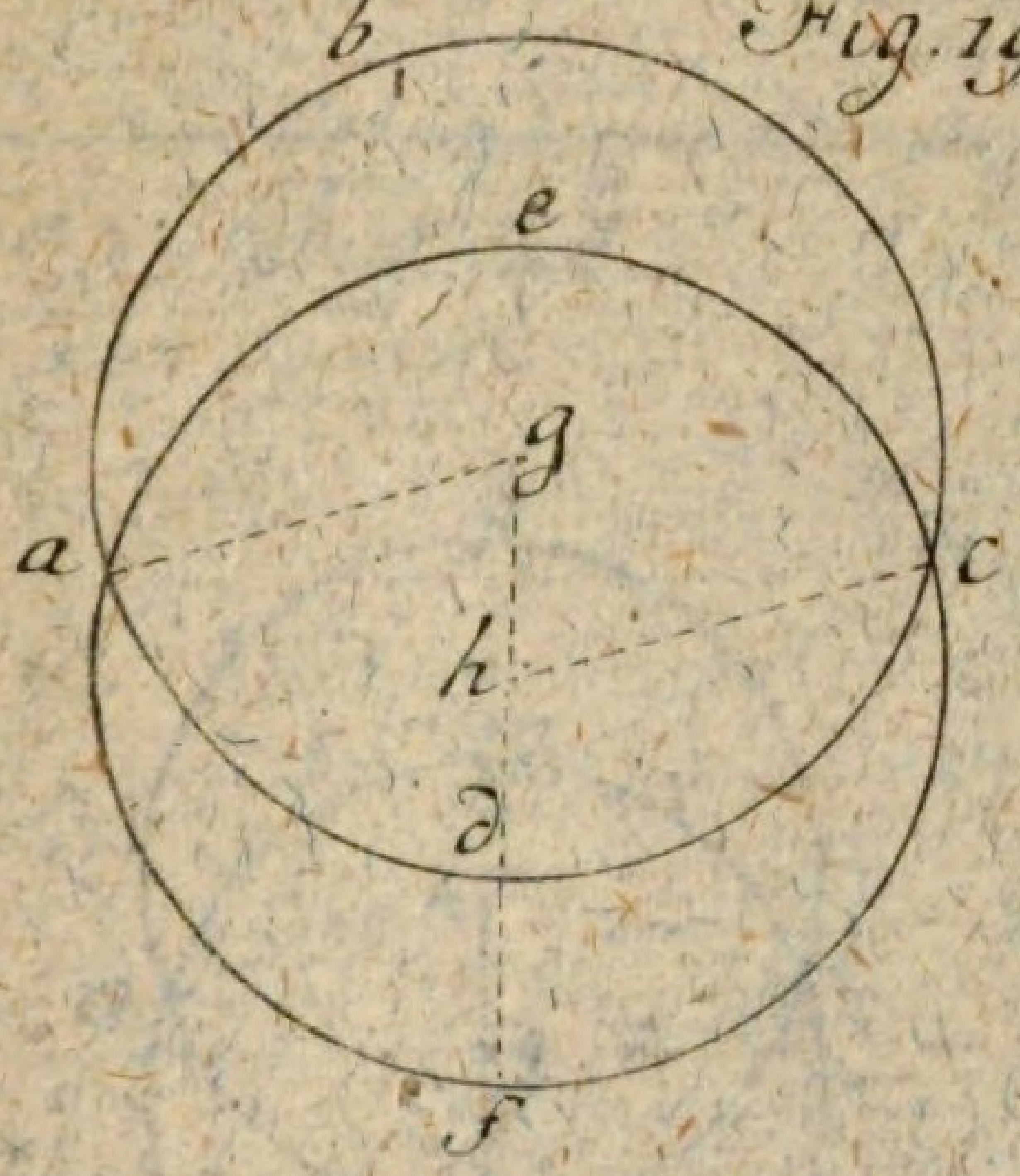


Fig. 21.

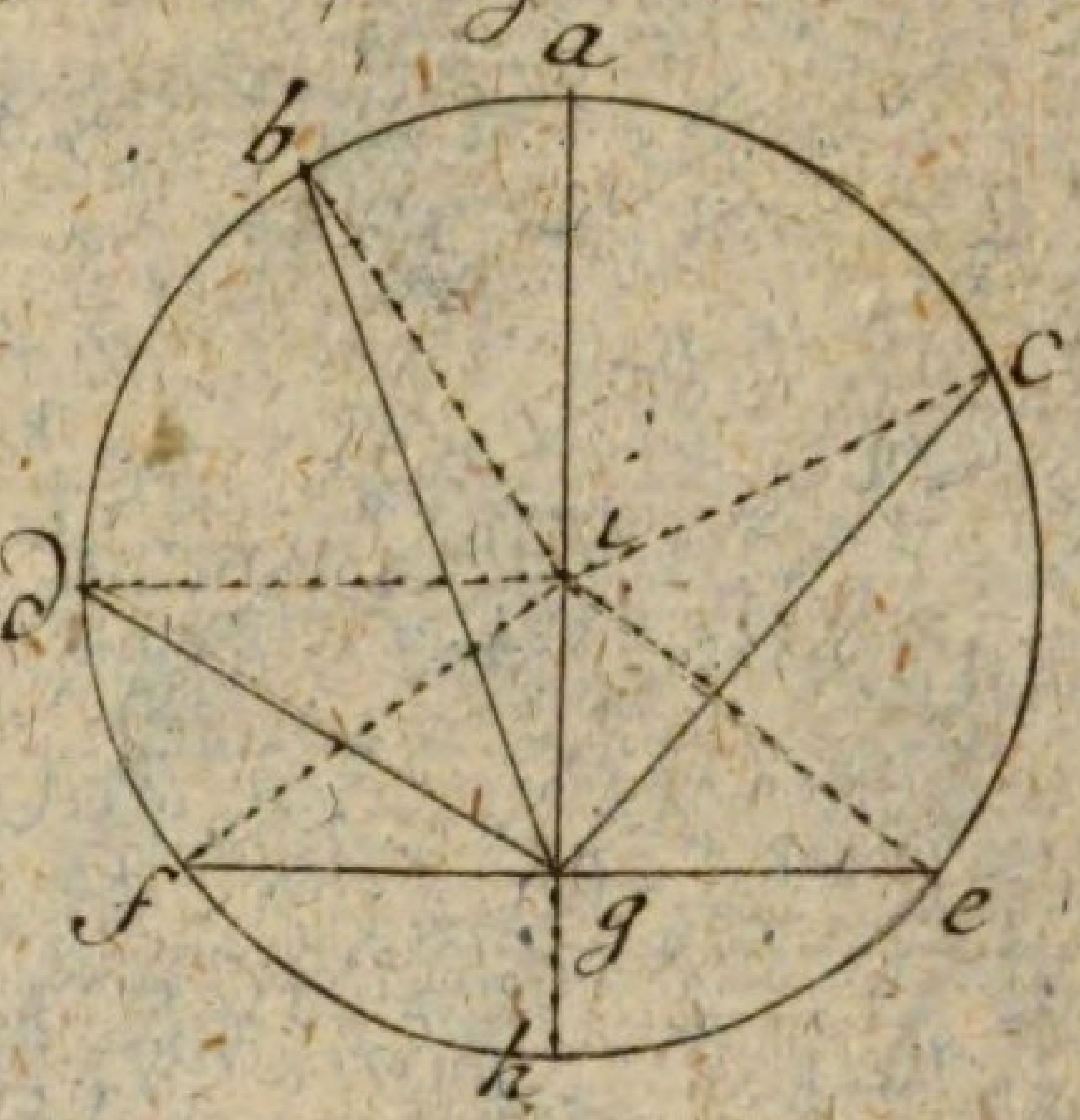


Fig. 20.

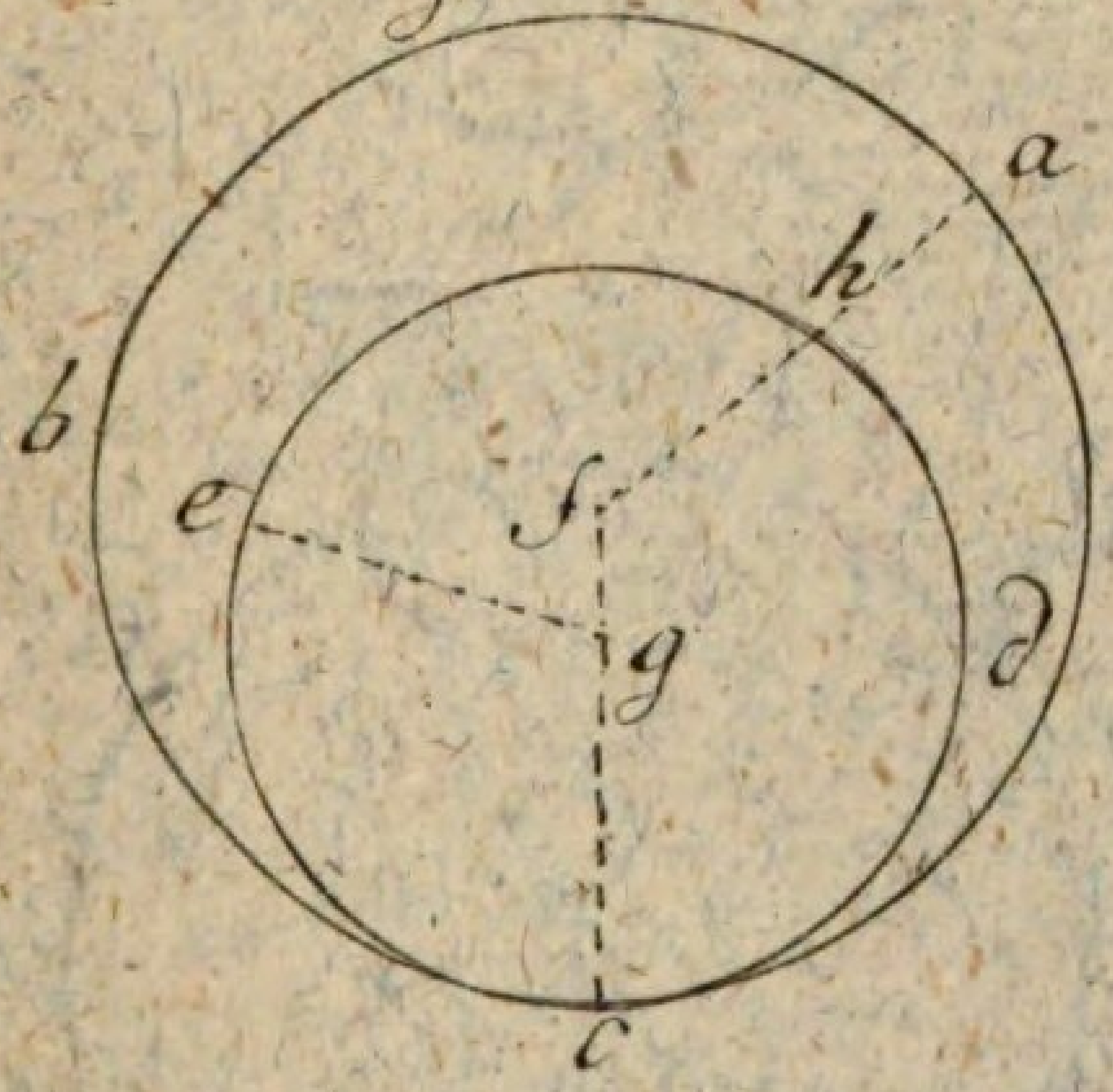


Fig. 22.

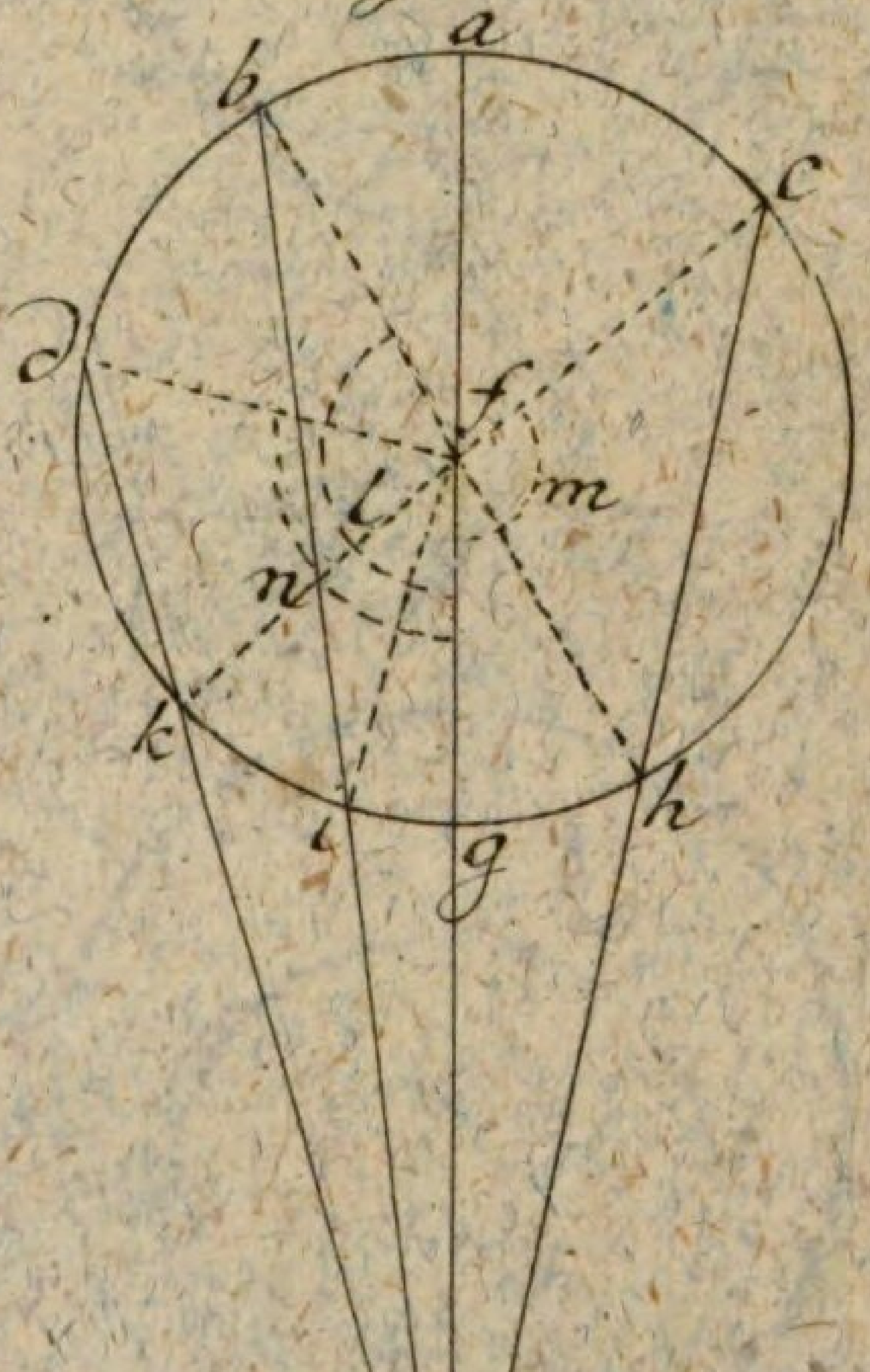
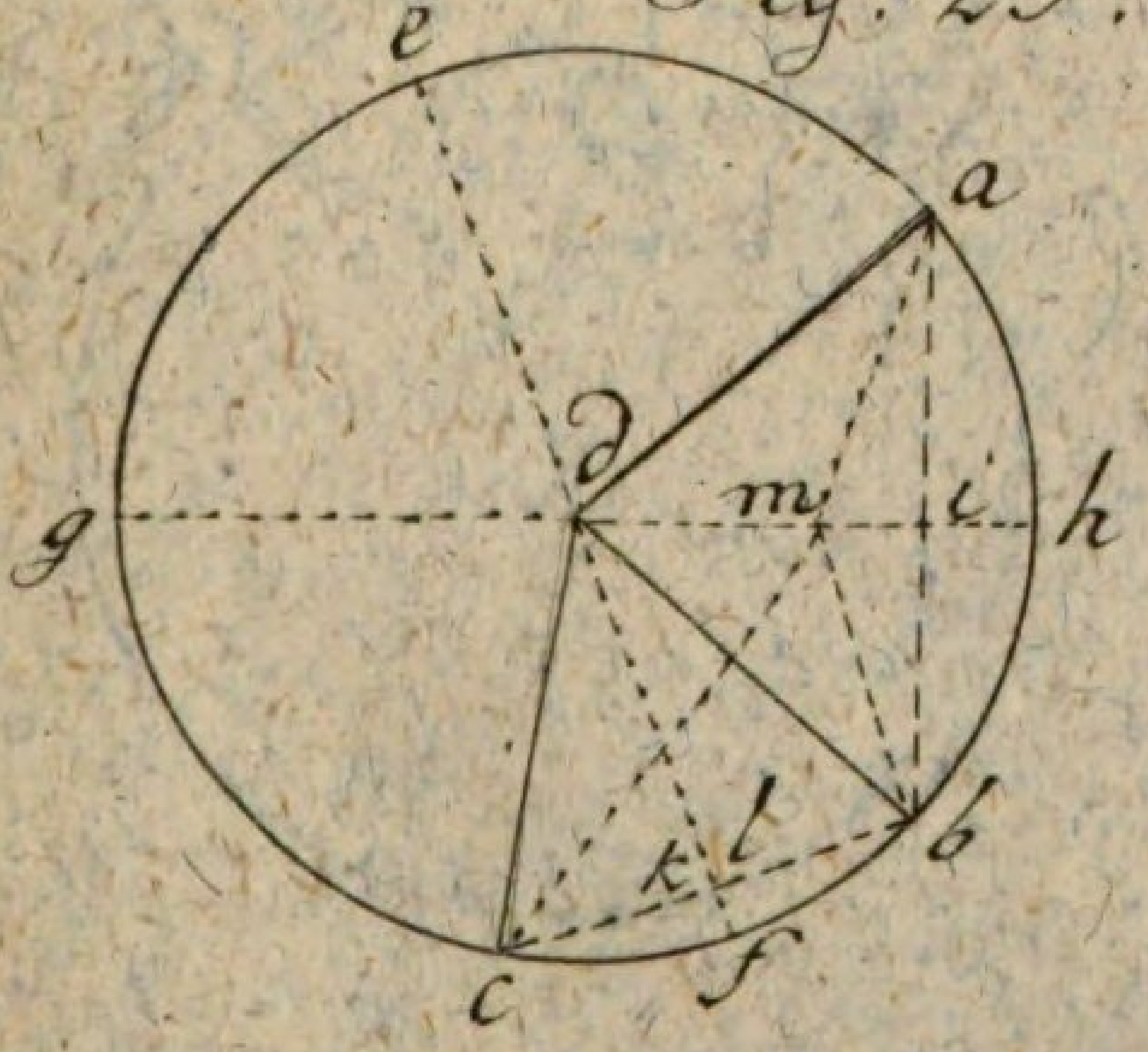


Fig. 23.



Tab. IV.

Fig. 24.

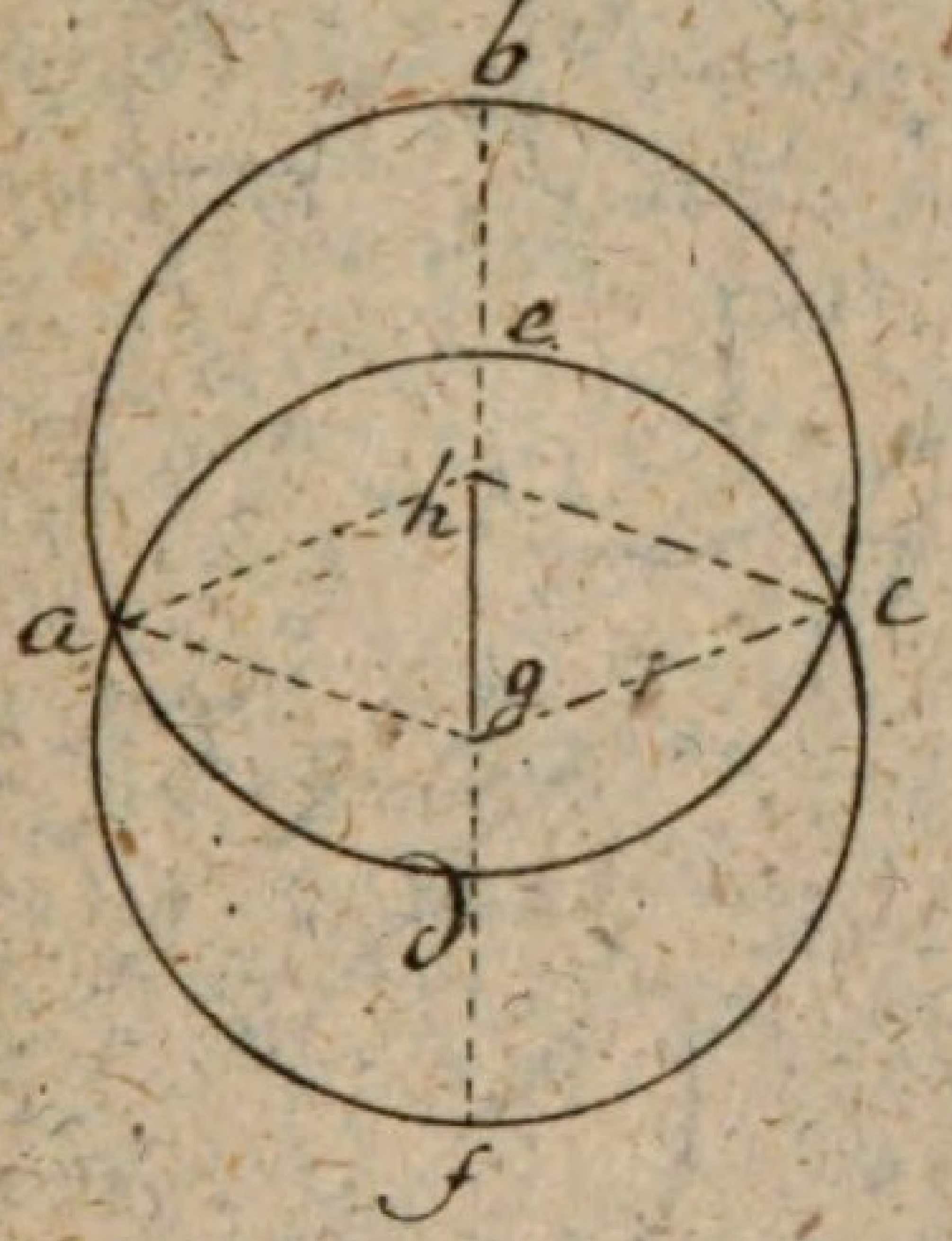


Fig. 25.

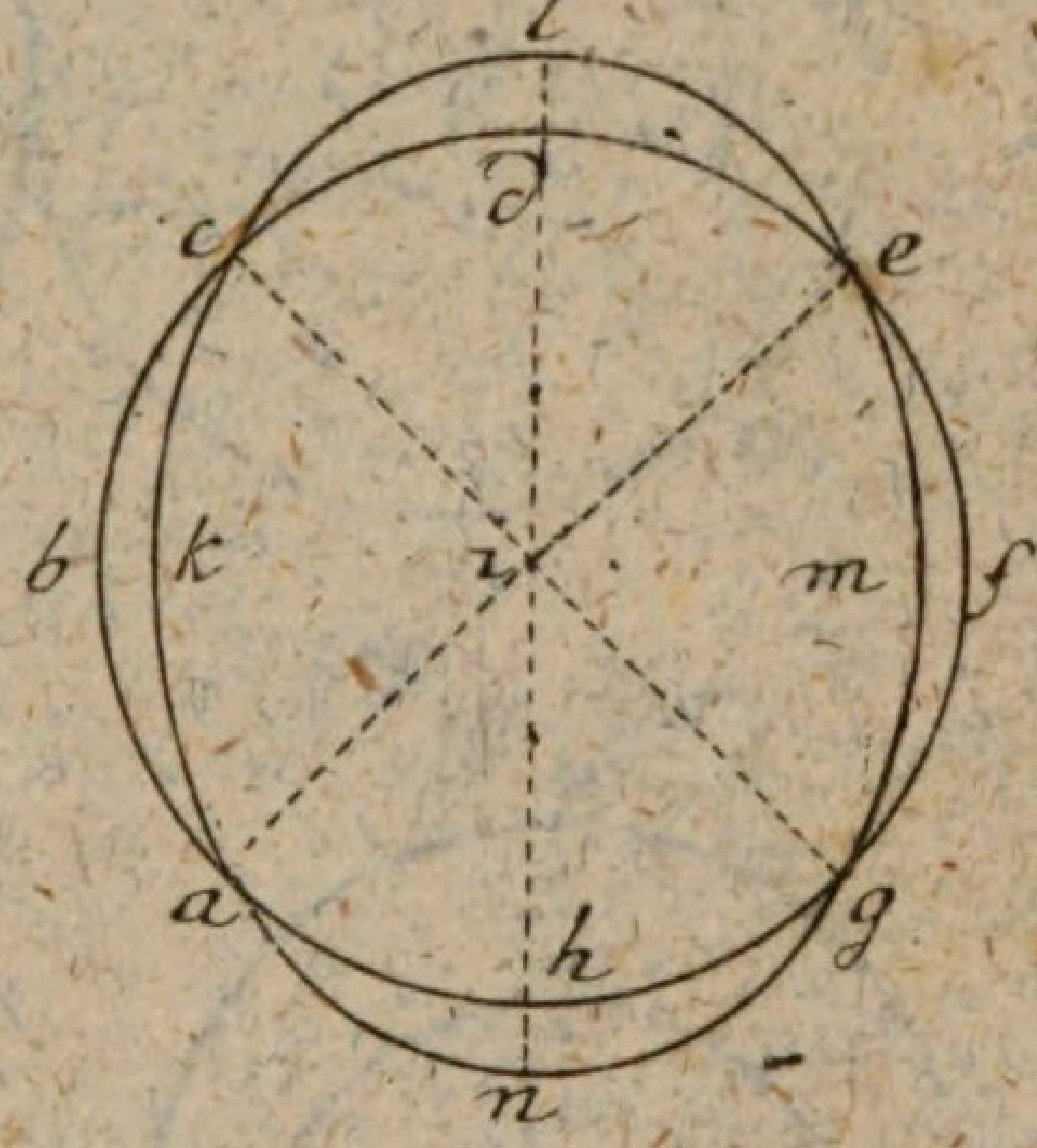


Fig. 26.

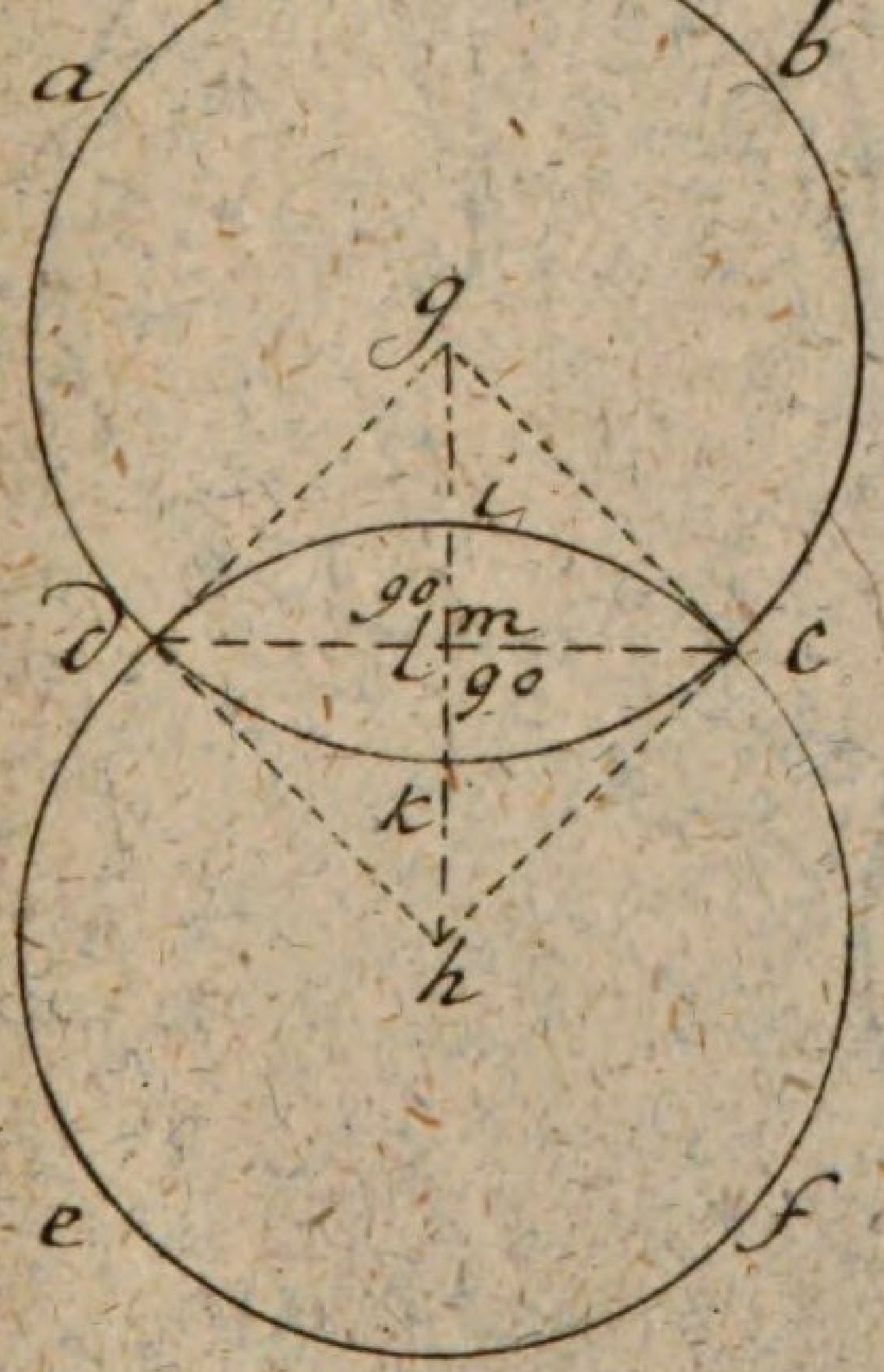
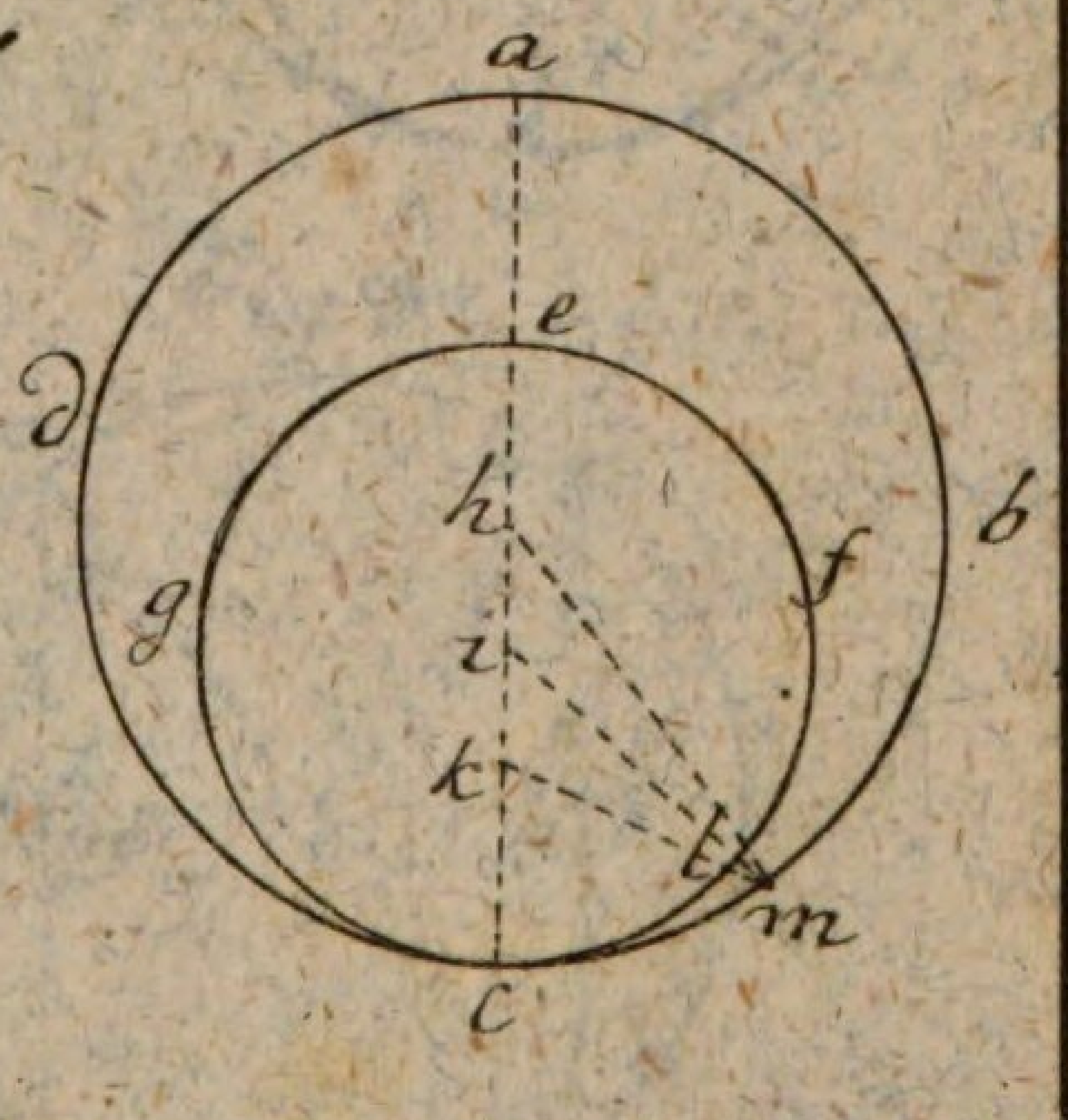


Fig. 27.



Tab V.

Fig. 28.

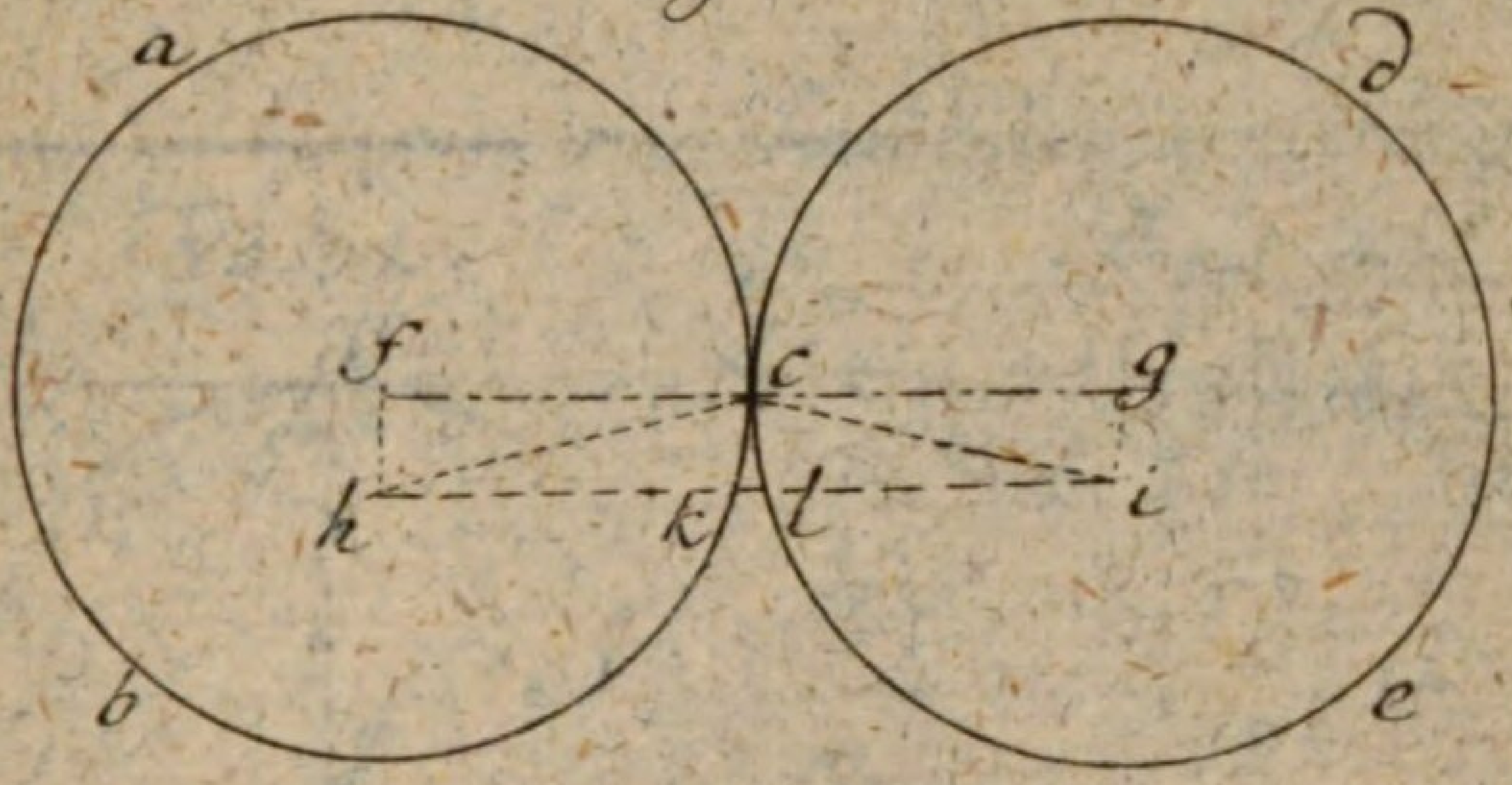


Fig. 29.

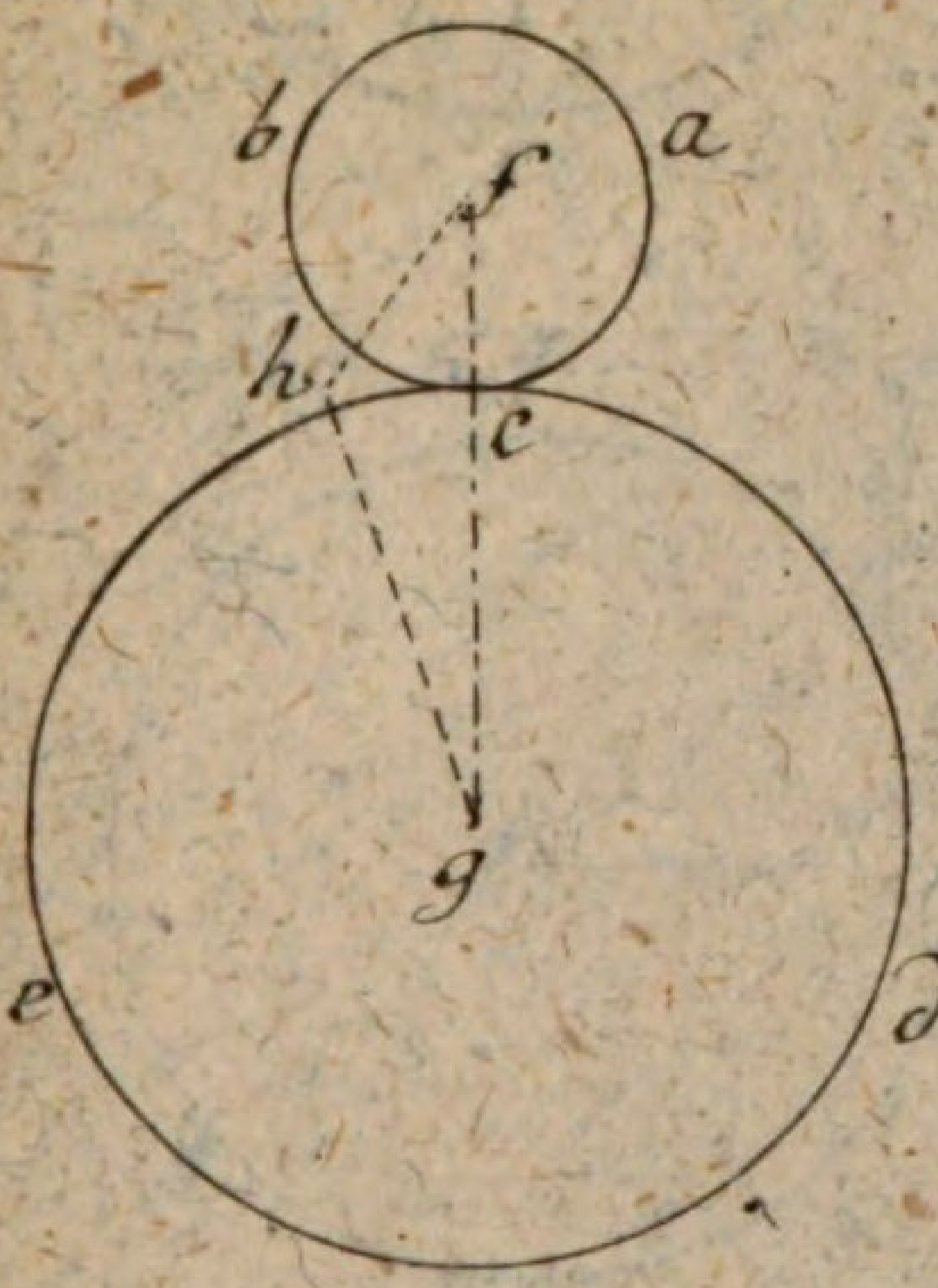


Fig. 30.

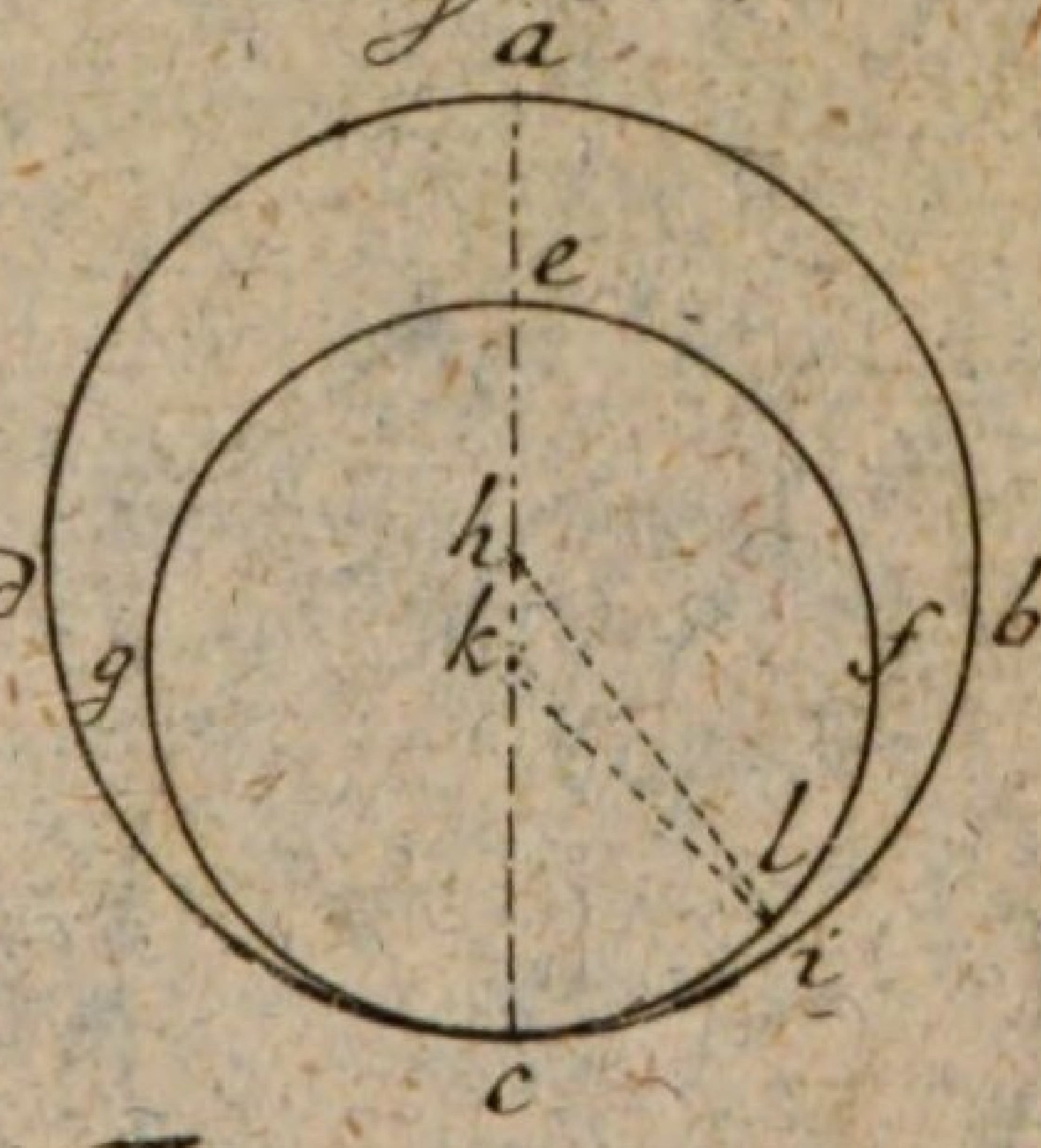
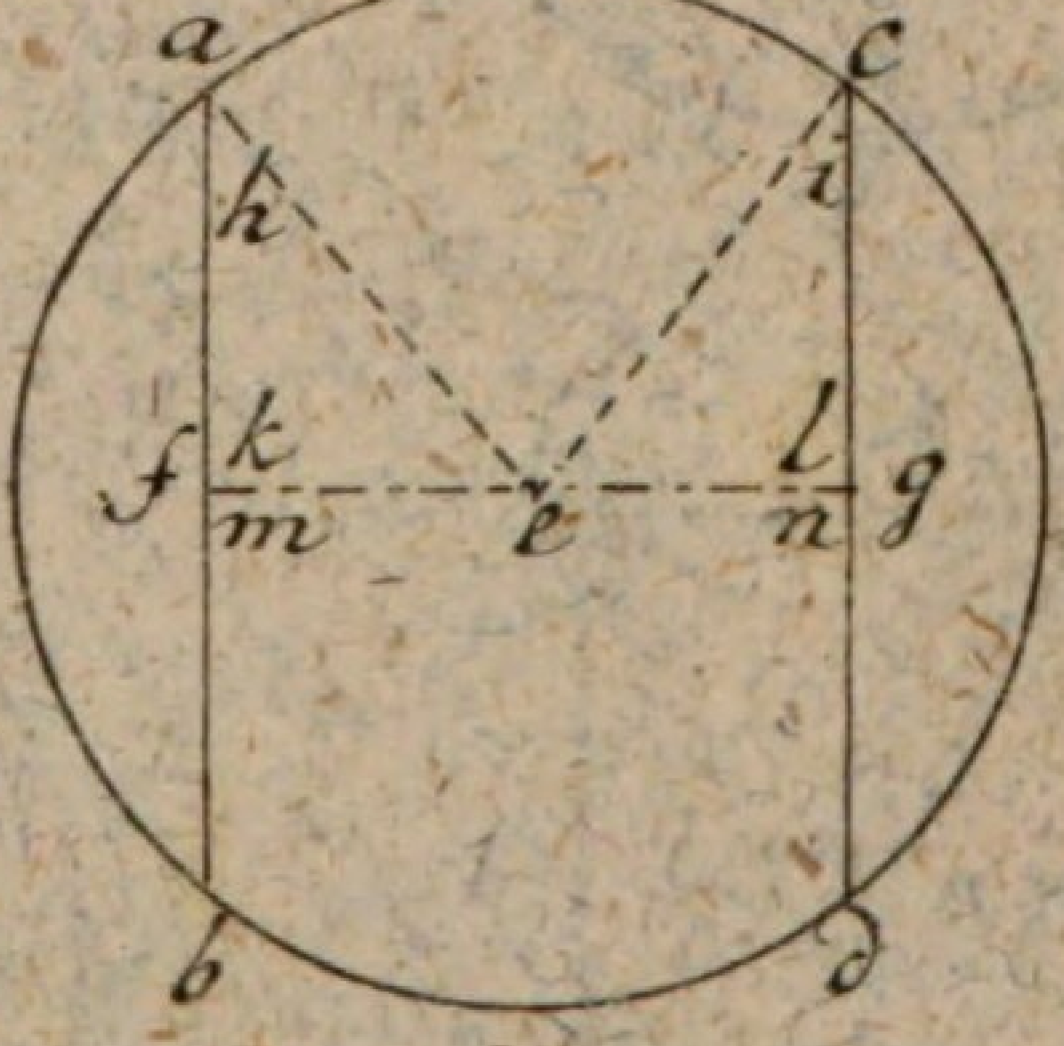


Fig. 31.



Tab. VI.

Fig. 32.

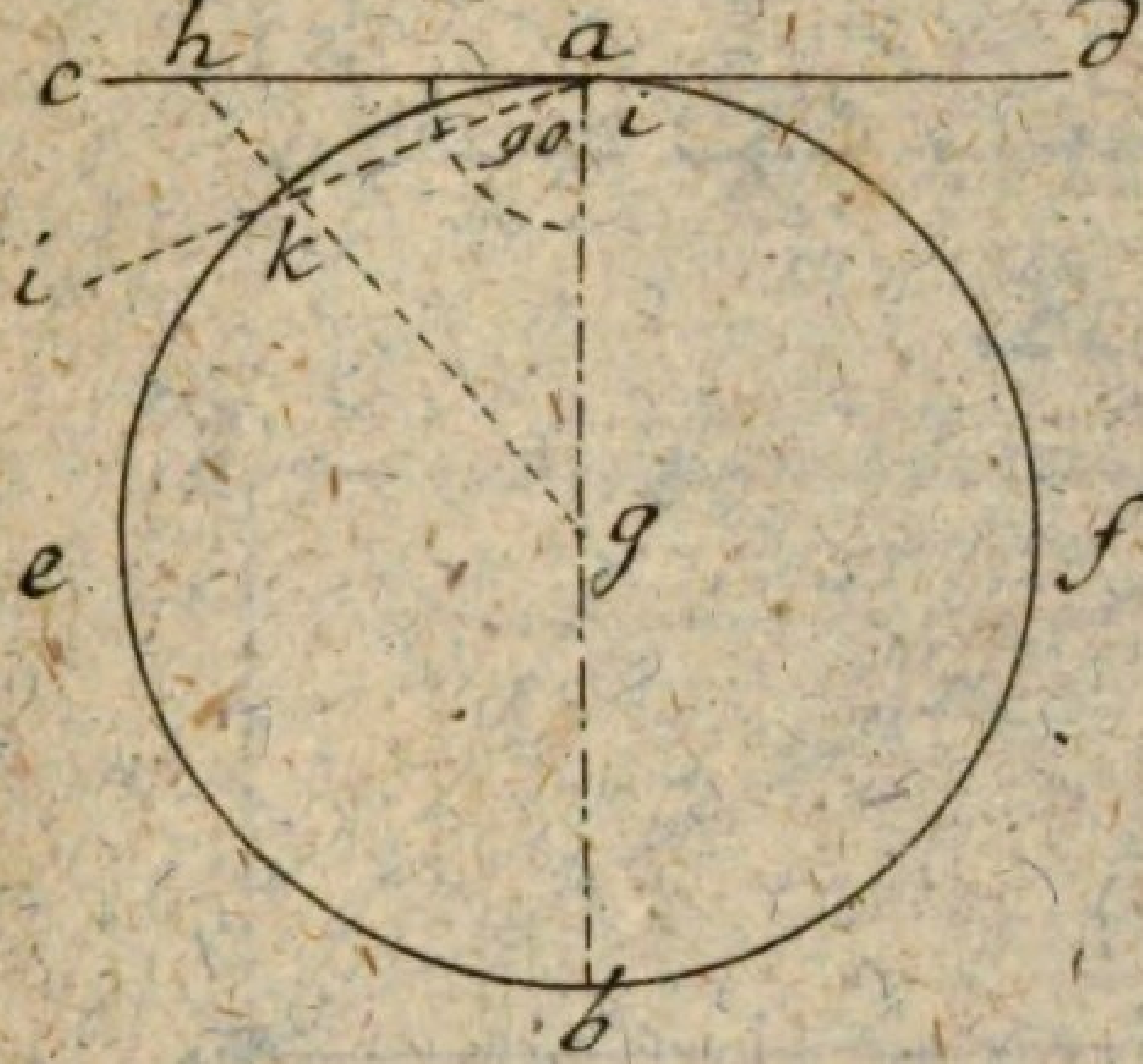


Fig. 33.

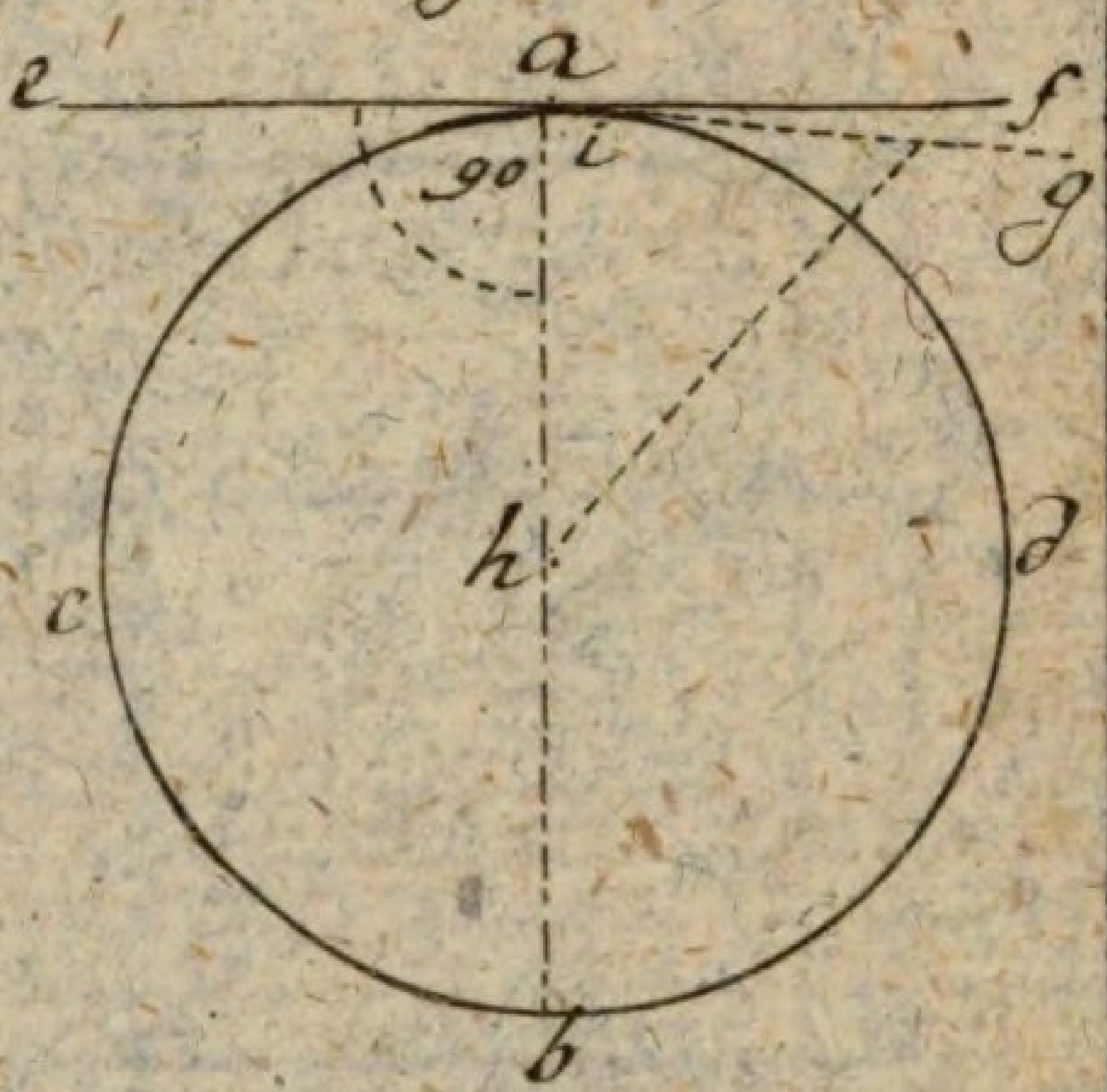


Fig. 54.

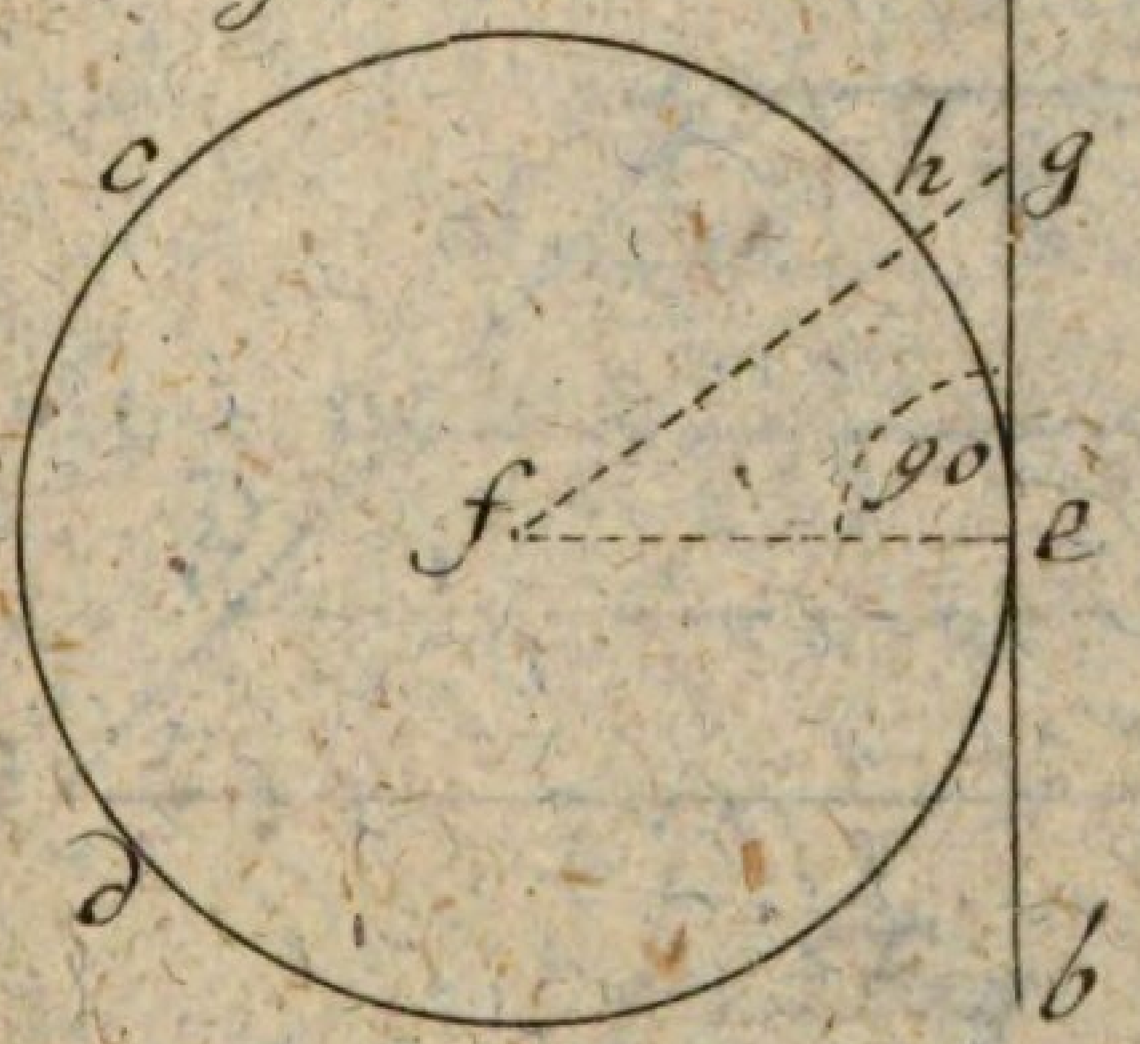


Fig. 35.

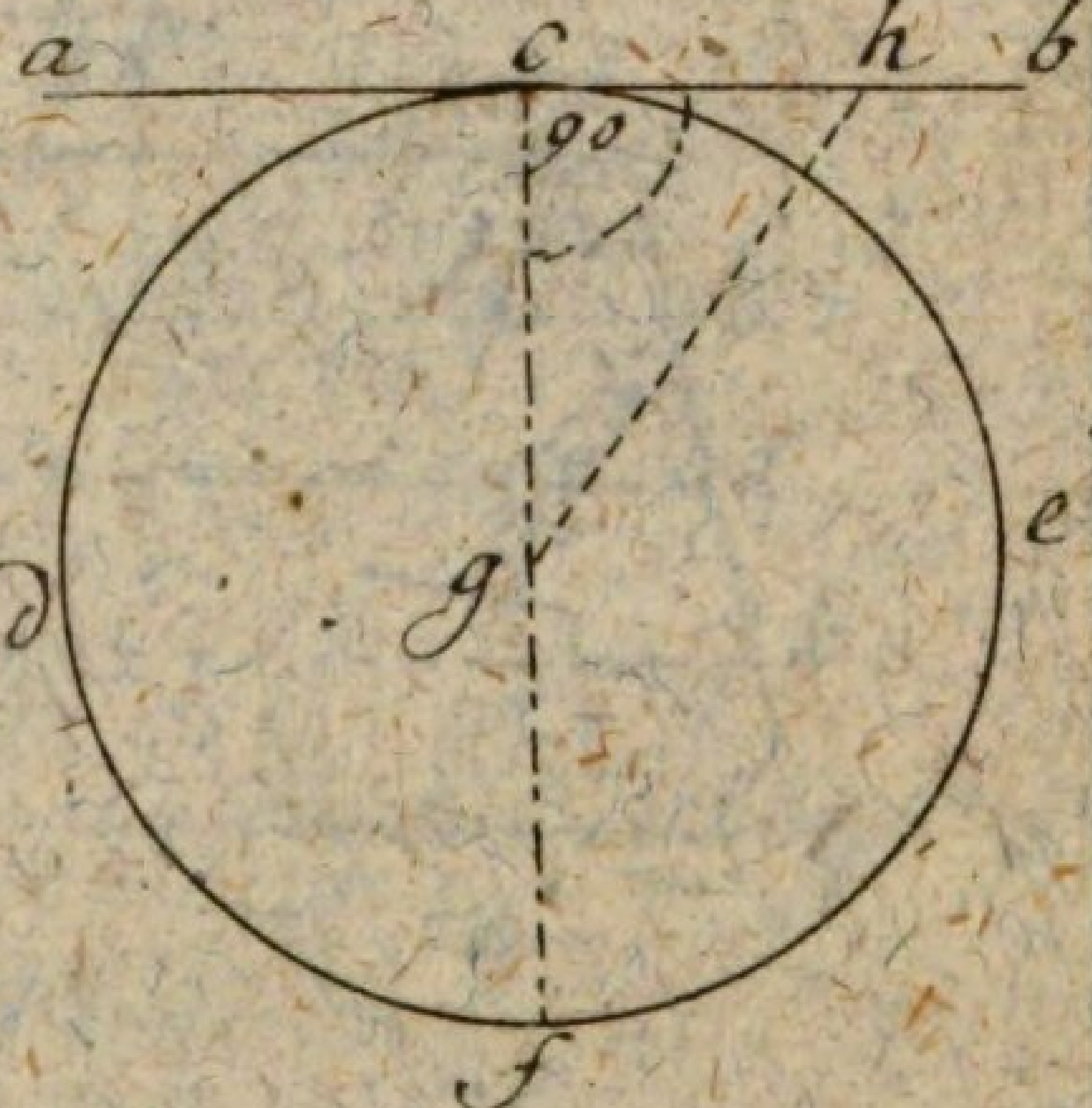
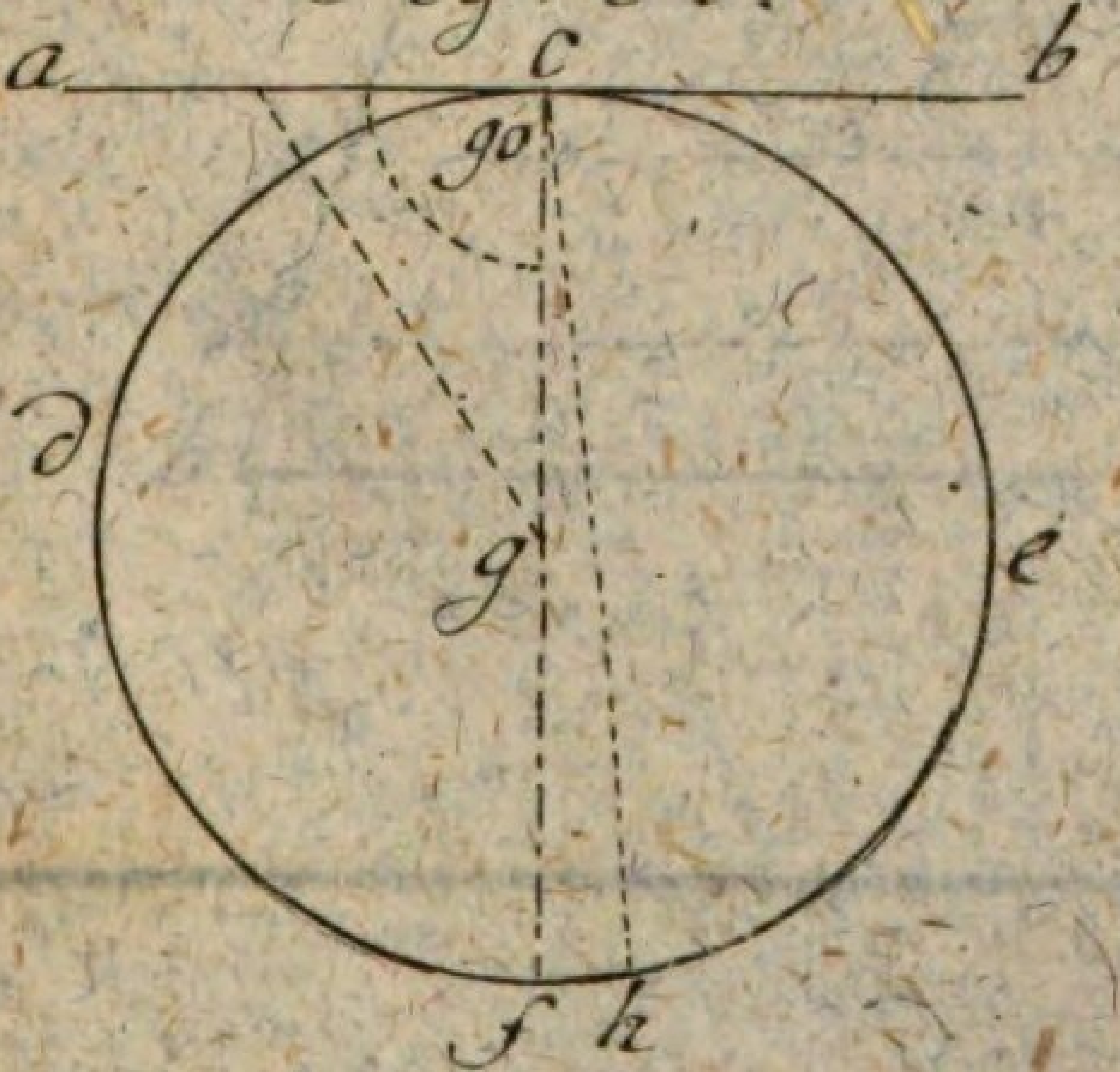


Fig. 36.



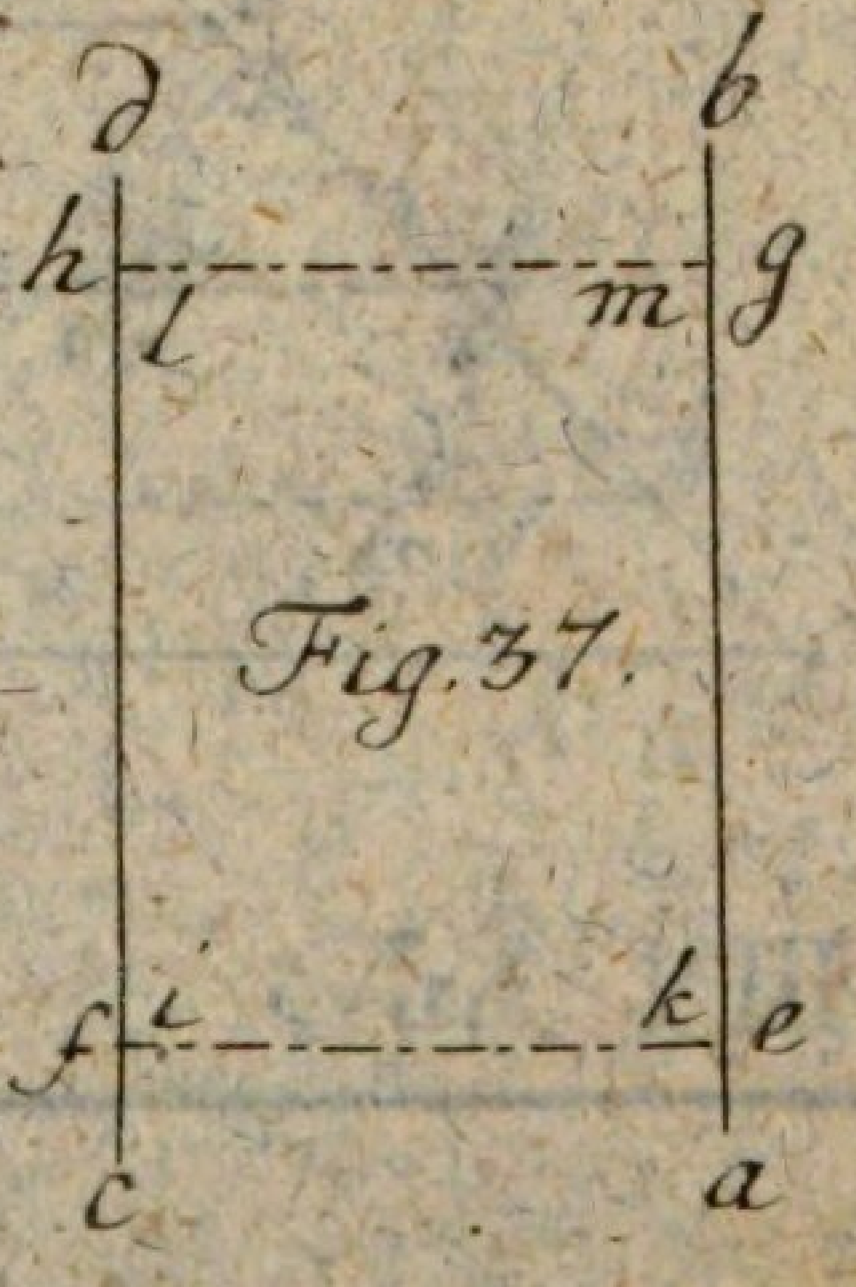


Fig. 37.

Tab. VII.

Fig. 38.

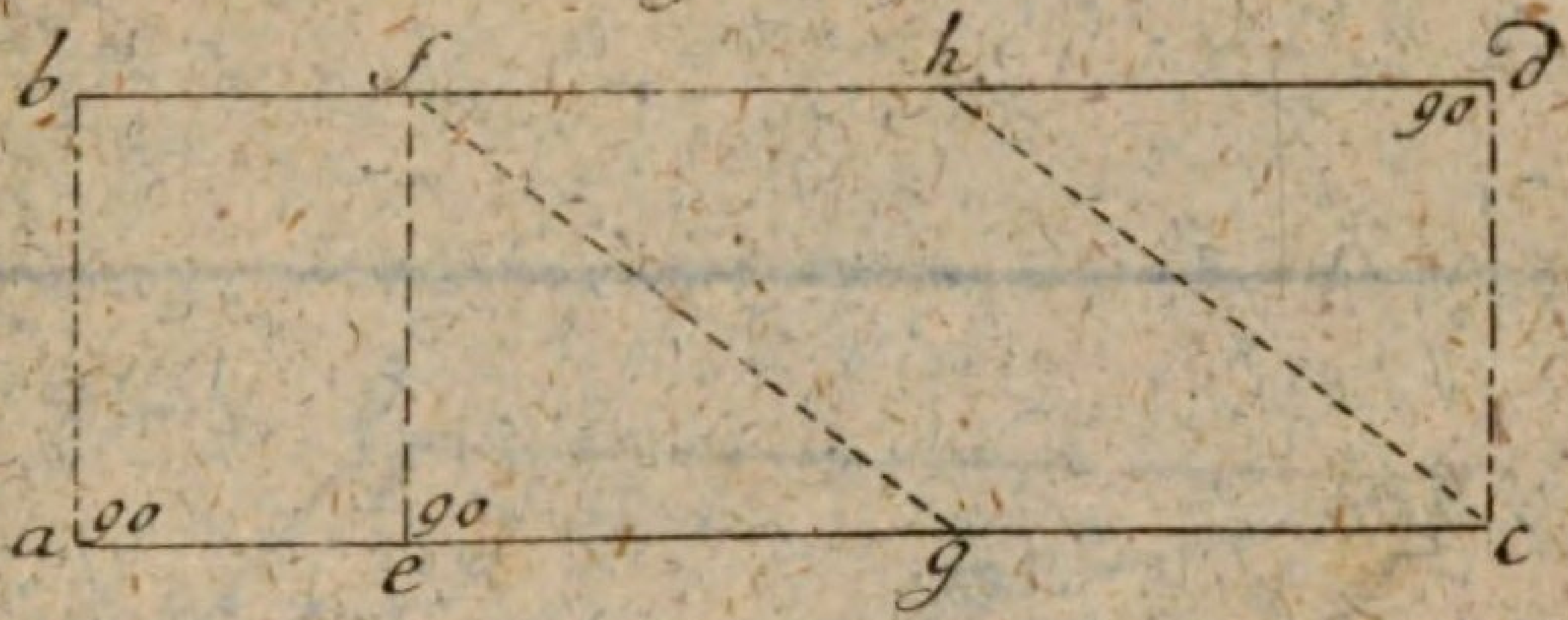


Fig. 39.

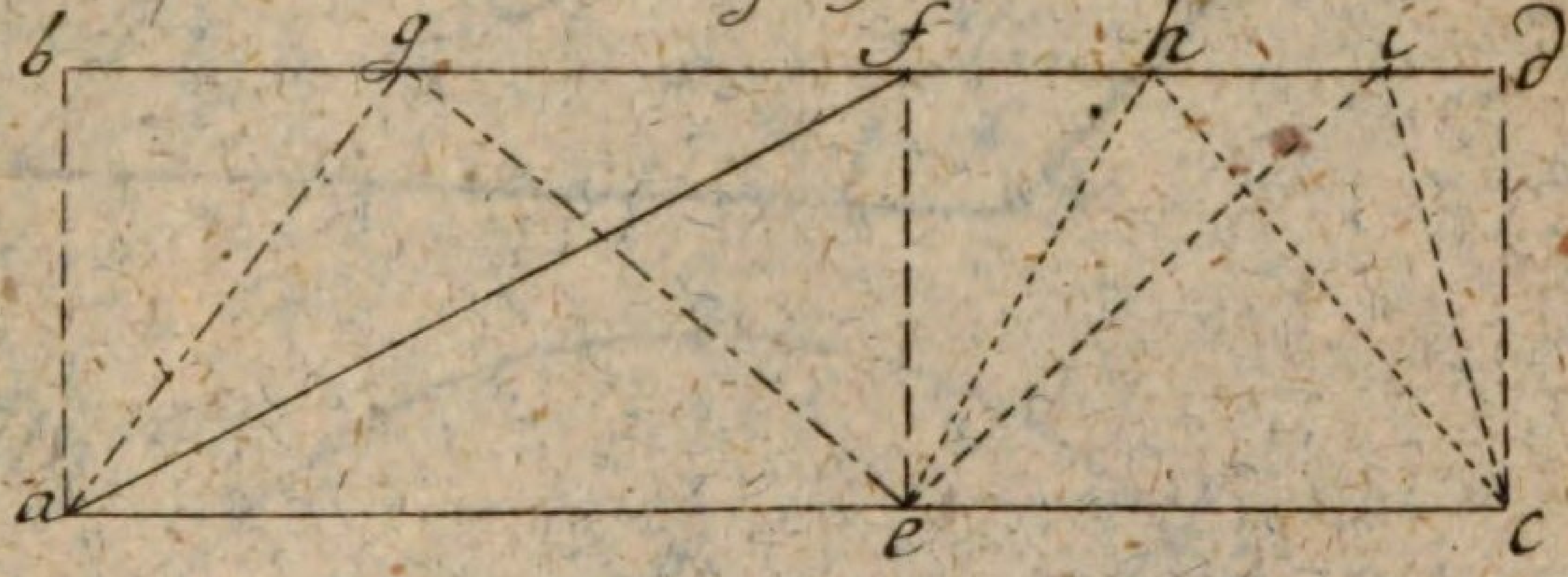


Fig. 40.

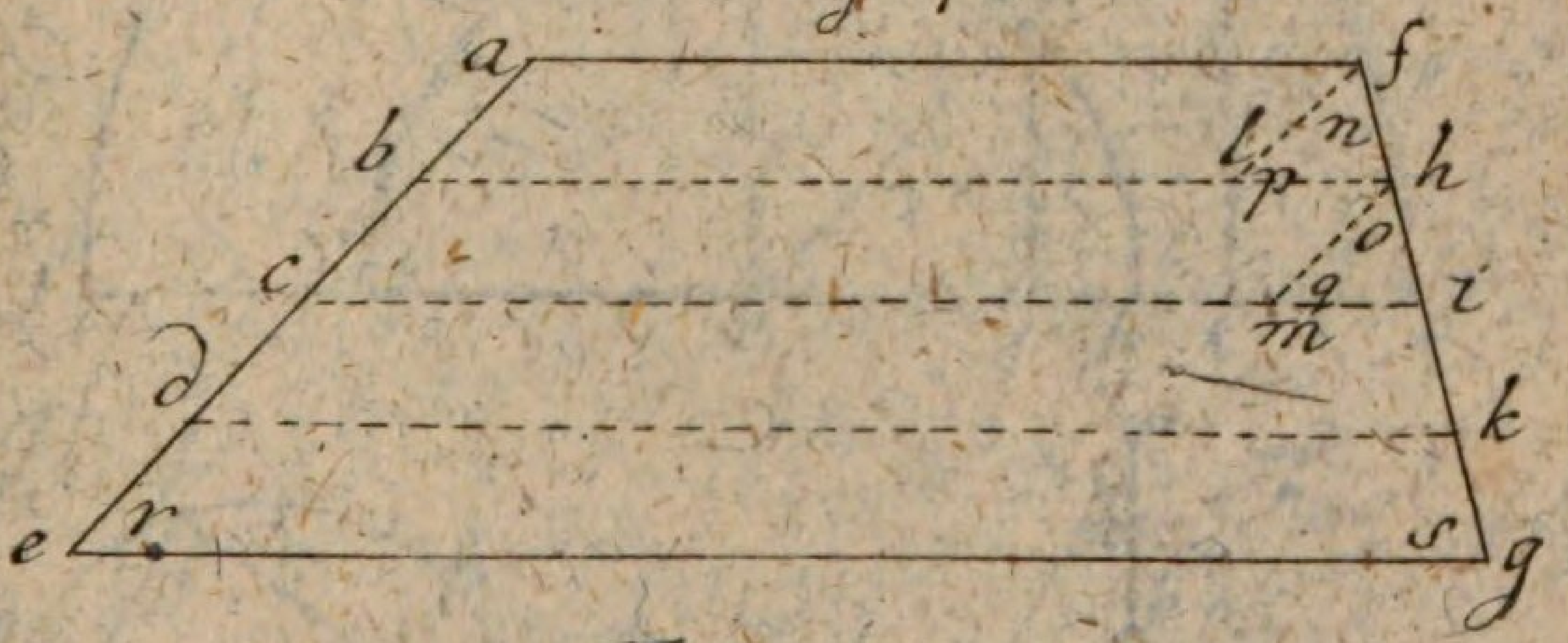
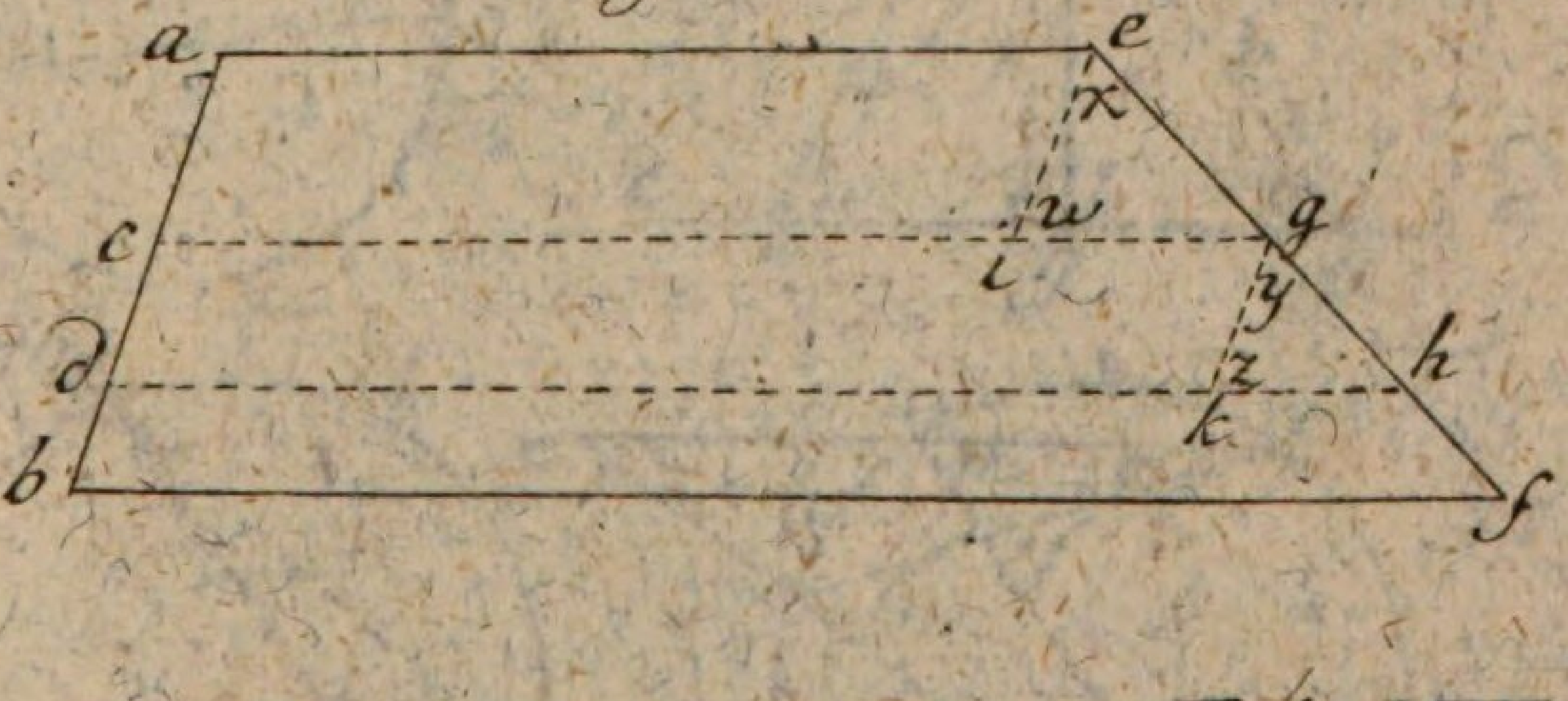


Fig. 41.



Tab. VIII.

Fig. 42

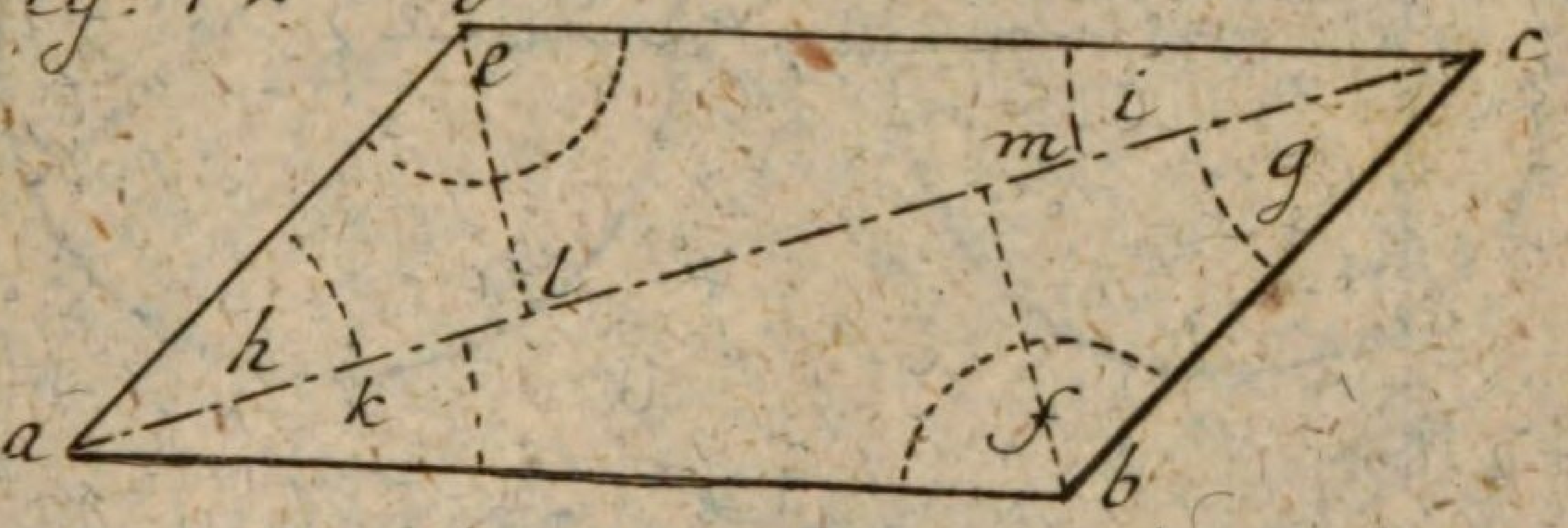


Fig. 43.

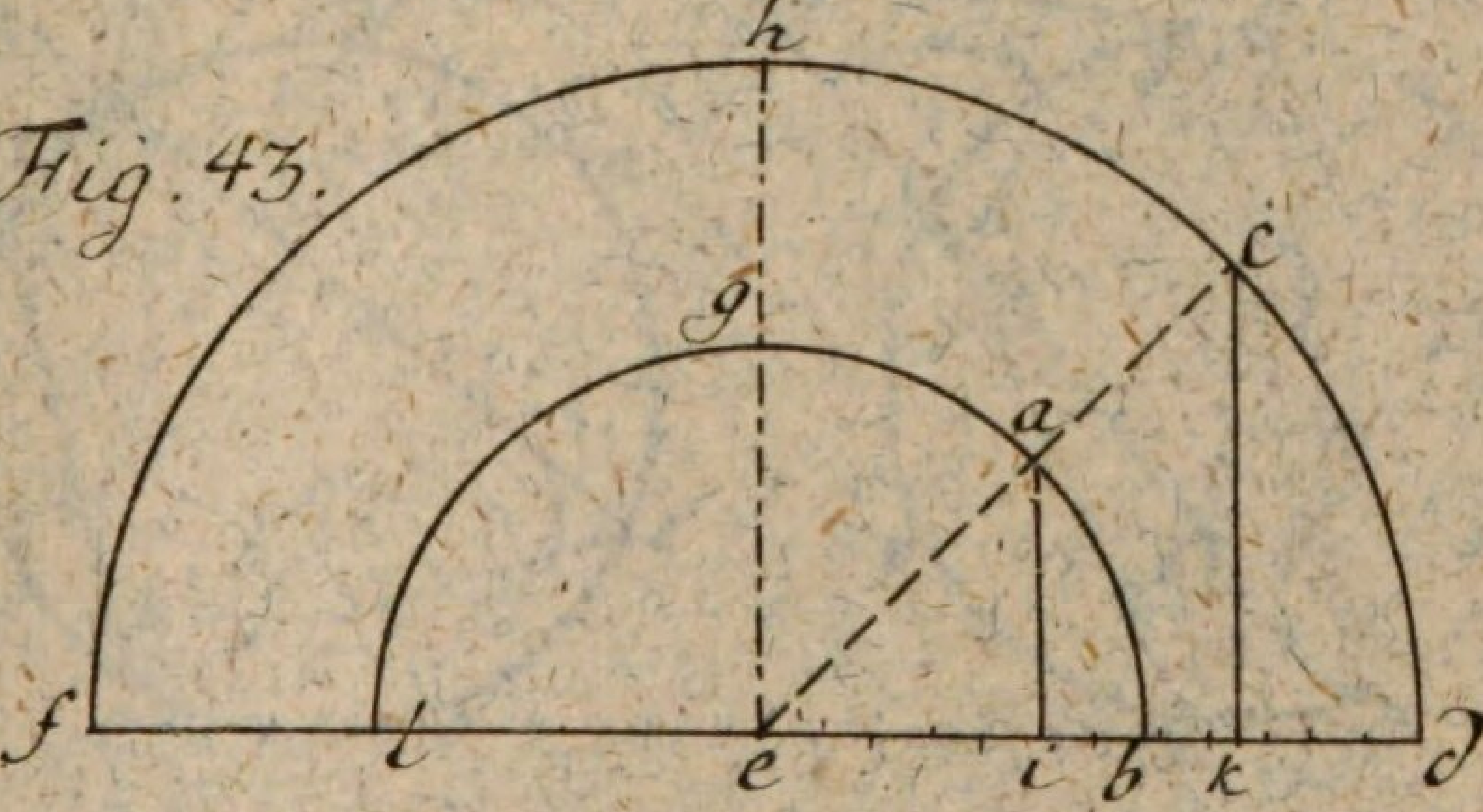


Fig: 44

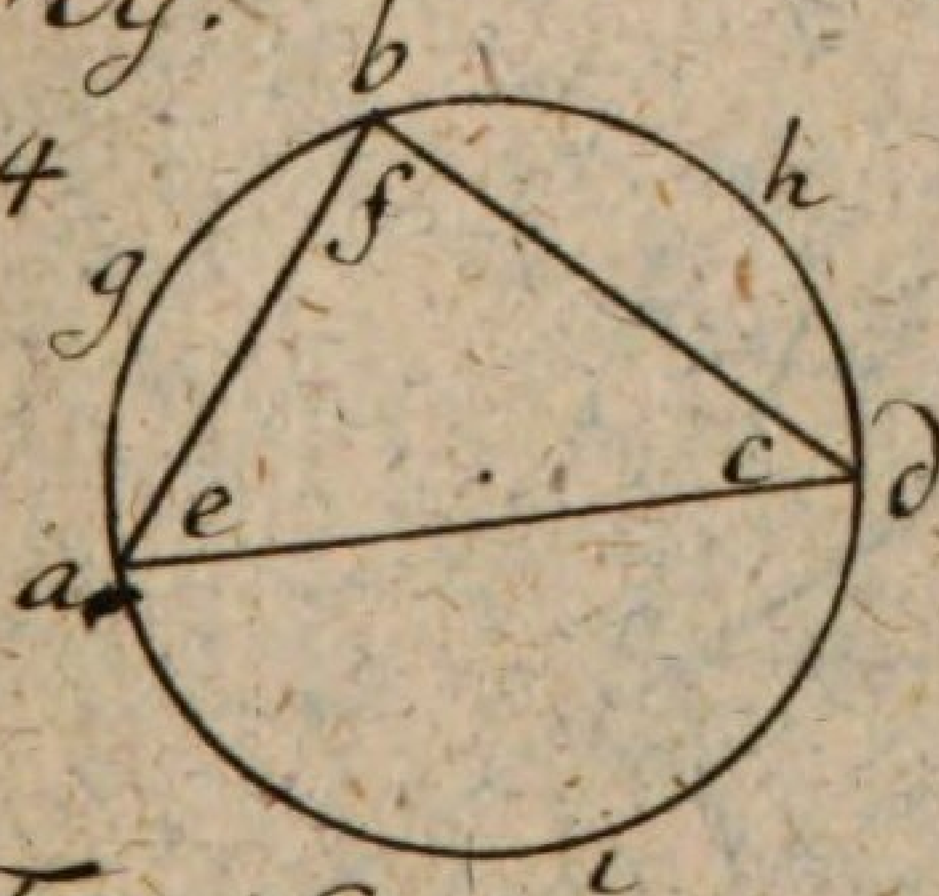


Fig. 45.

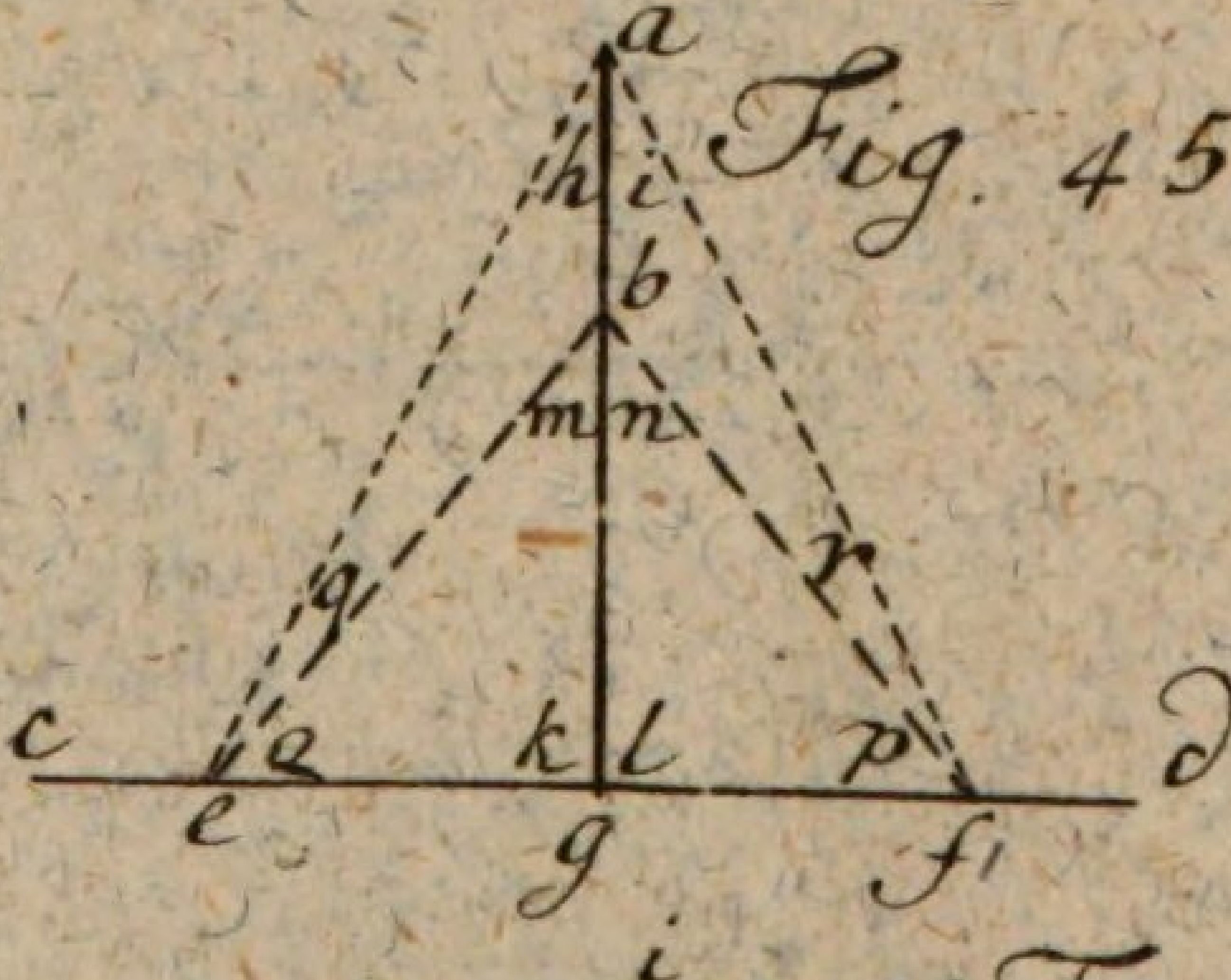


Fig. 46

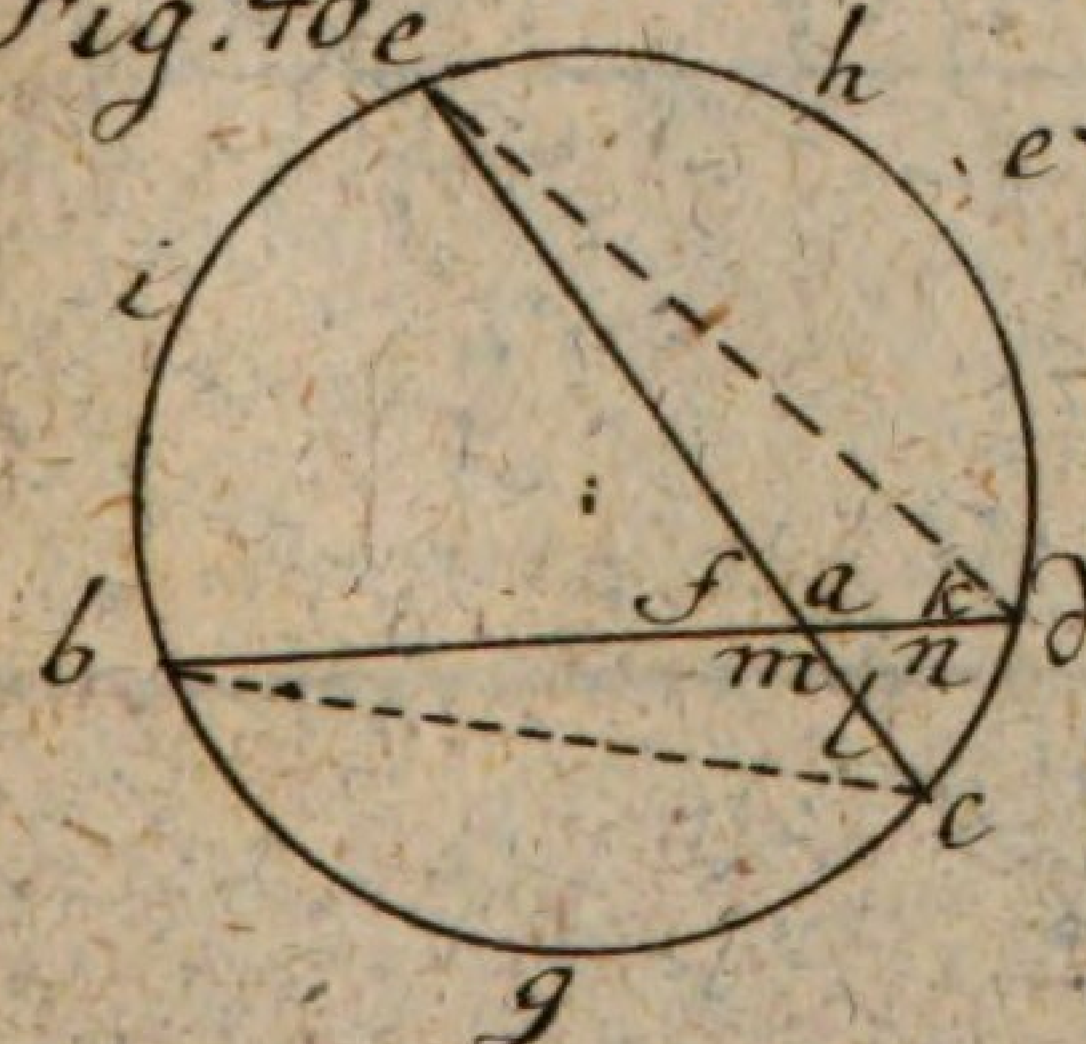
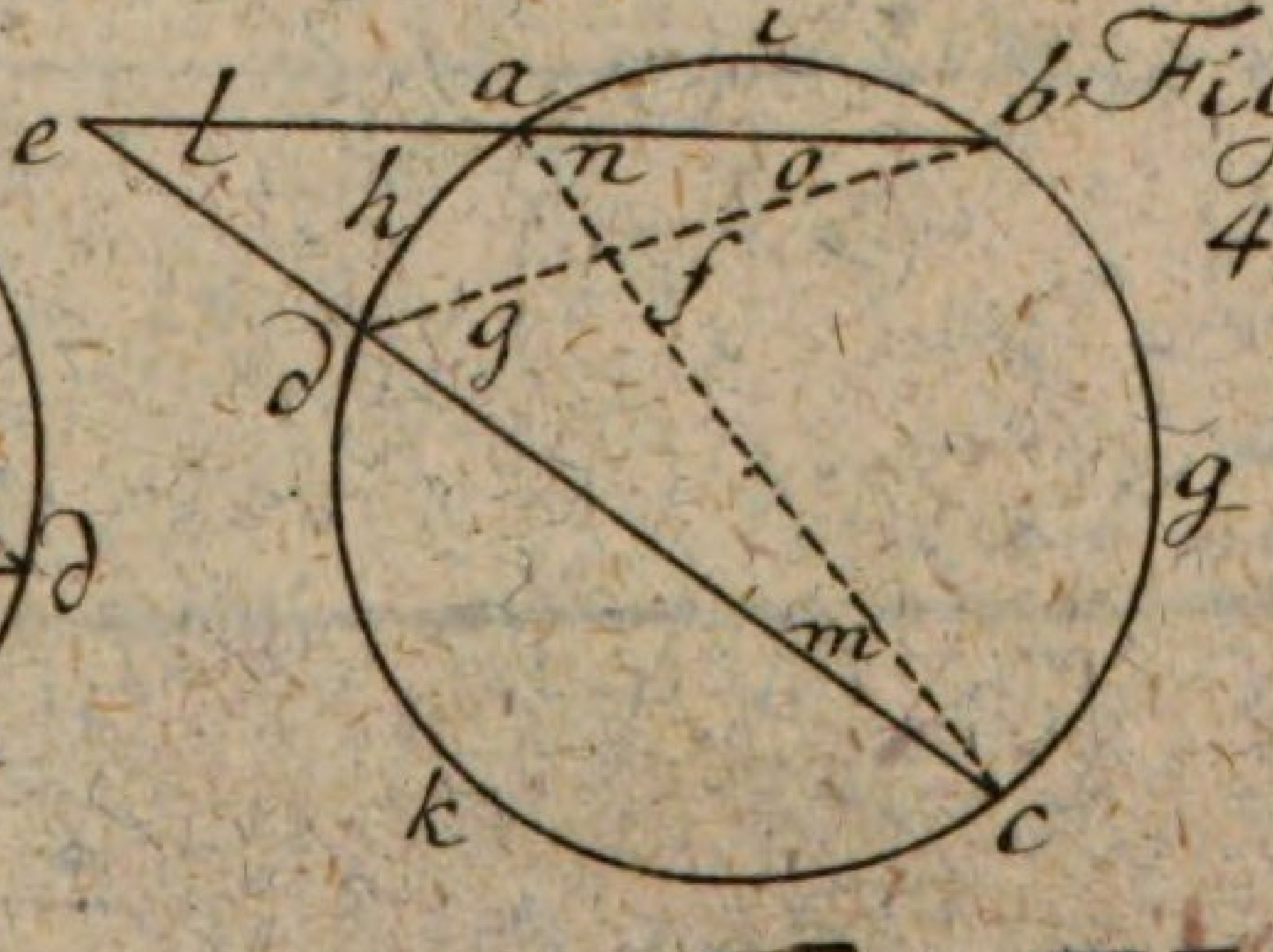


Fig. 47.



Tab. IX.

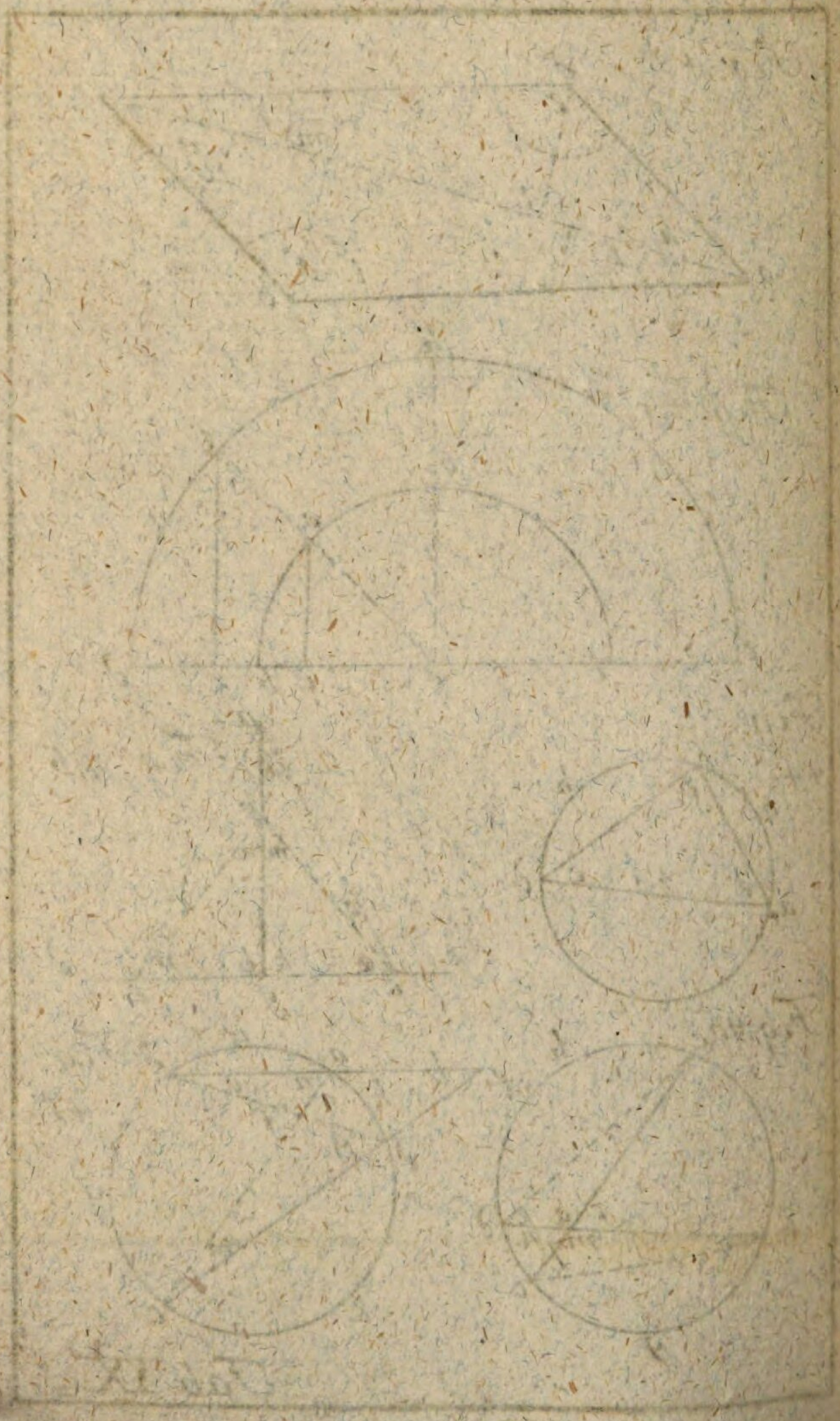


Fig. 48.

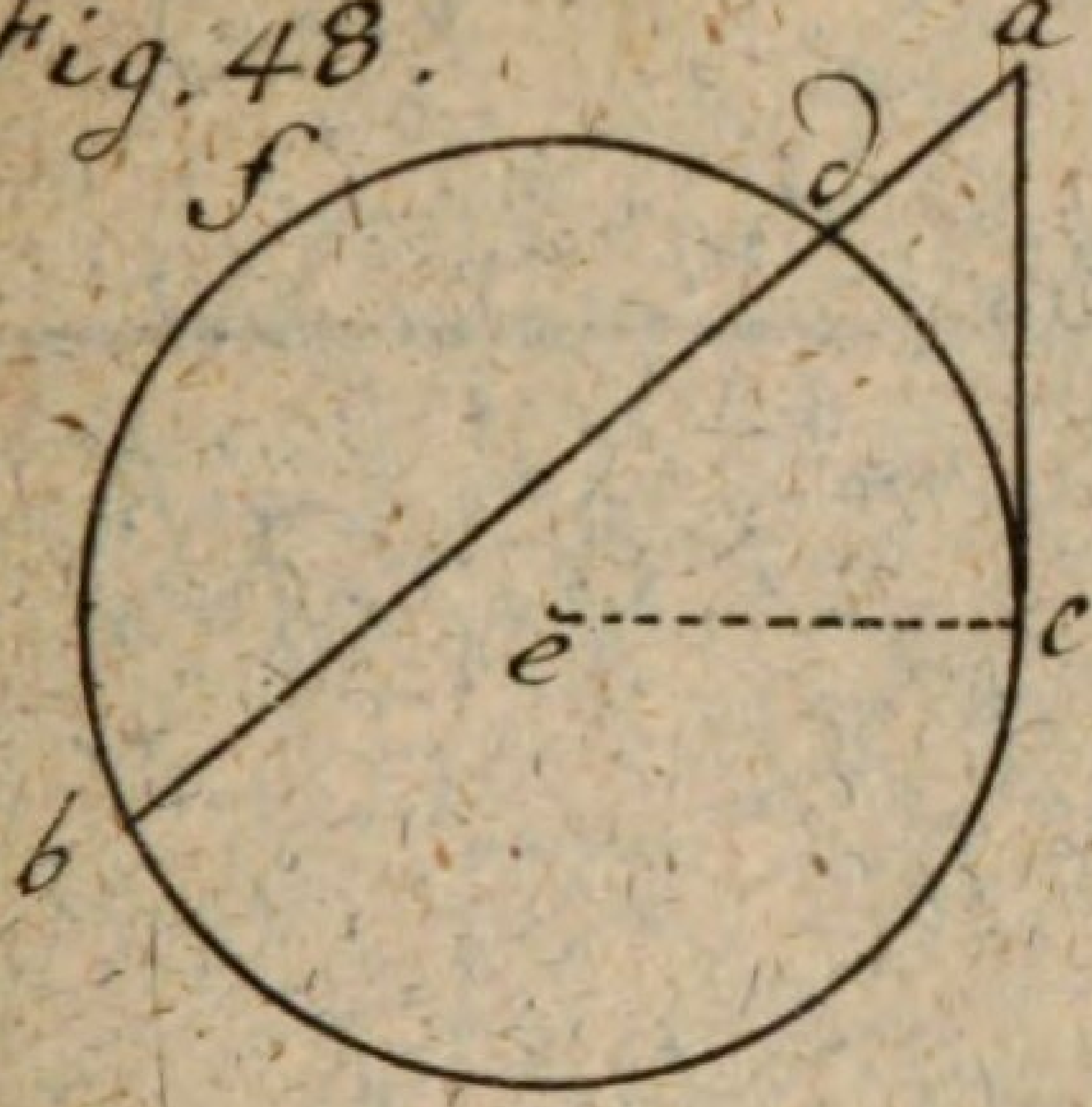


Fig. 49.

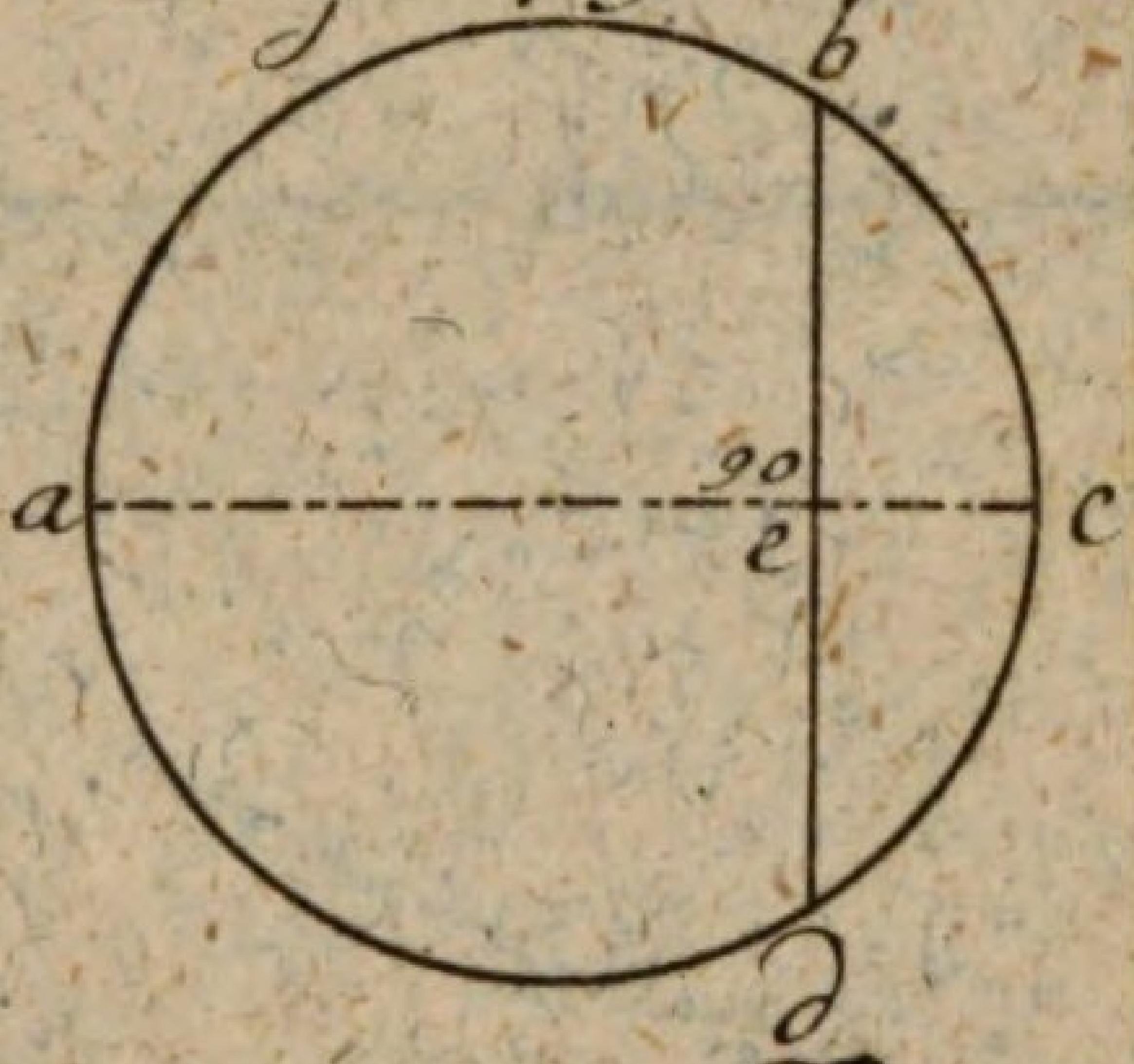


Fig. 50.

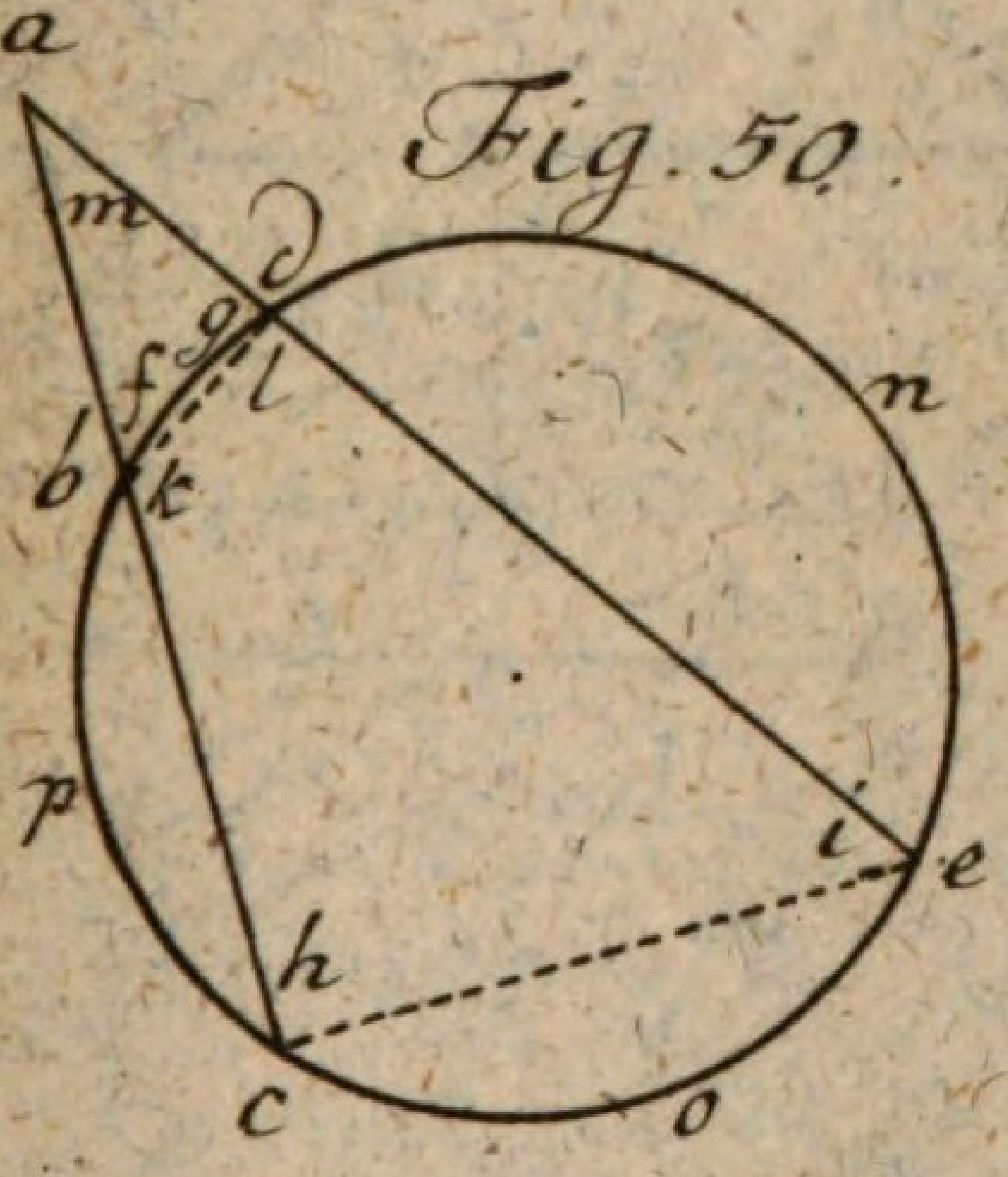


Fig. 51.

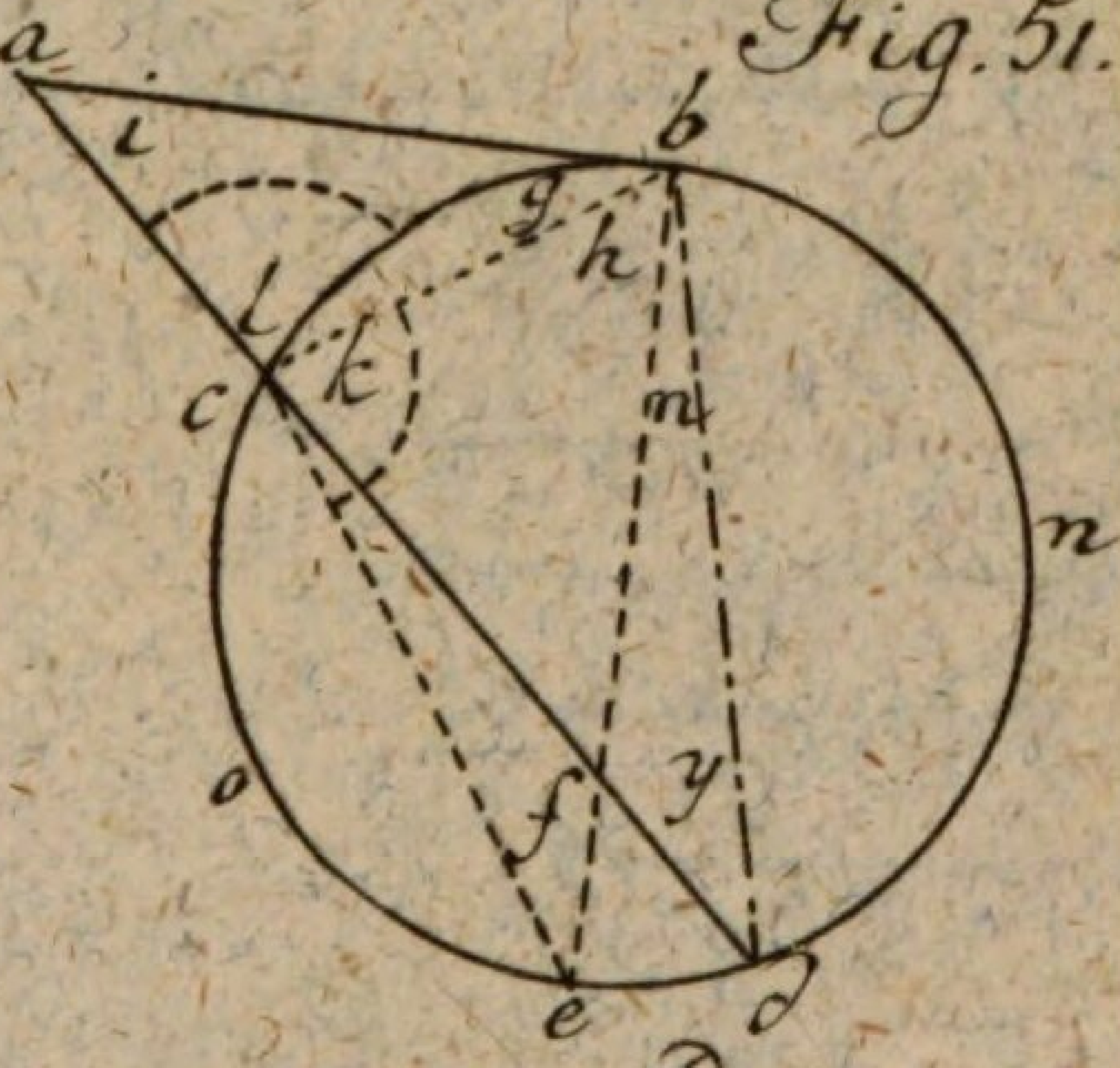
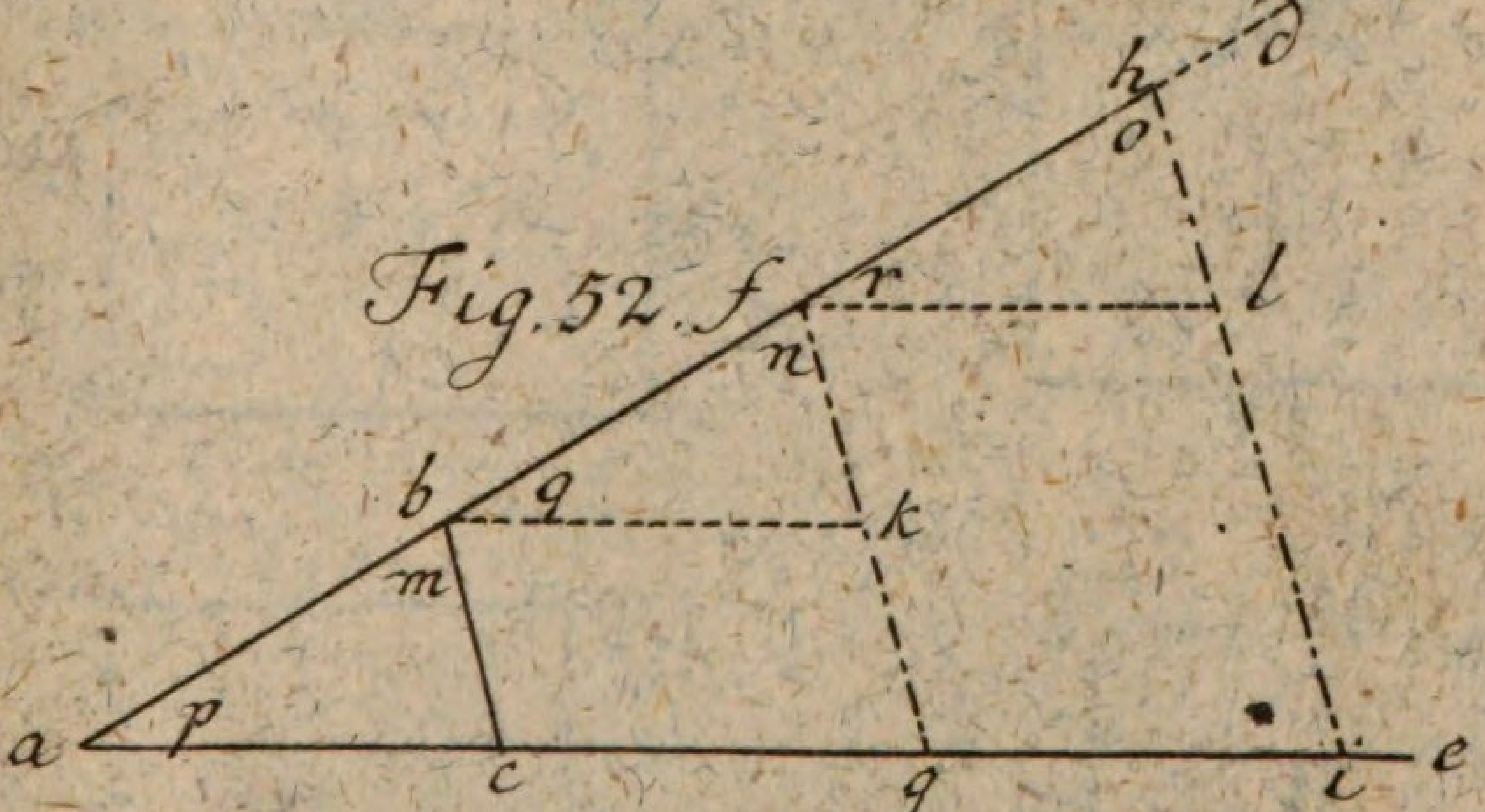


Fig. 52.



Tab. X.

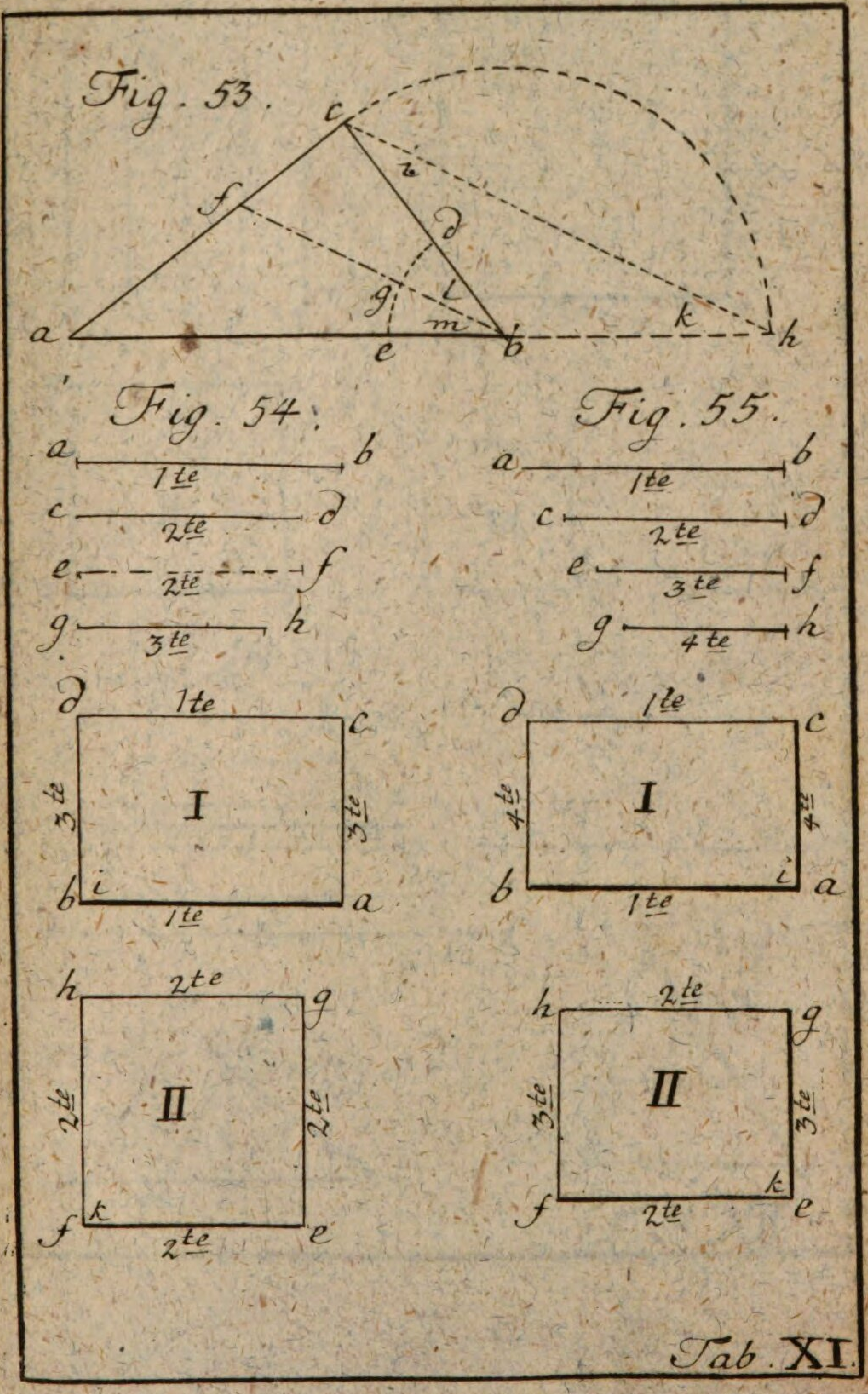


Fig. 53.
c
f
i
d
l
g
k
m
a
e
b
h
Fig. 54.
a b
1te
c d
2te
e f
2te
g h
3te
d 1te c
3te I 3te
b i a
1te
h 2te g
2te II 2te
f k e
2te
Fig. 55.
a b
1te
c d
2te
e f
3te
g h
4te
d 1te c
4te I 4te
b i a
1te
h 2te g
3te II 3te
f k e
2te
Tab. XI.

Fig. 56.

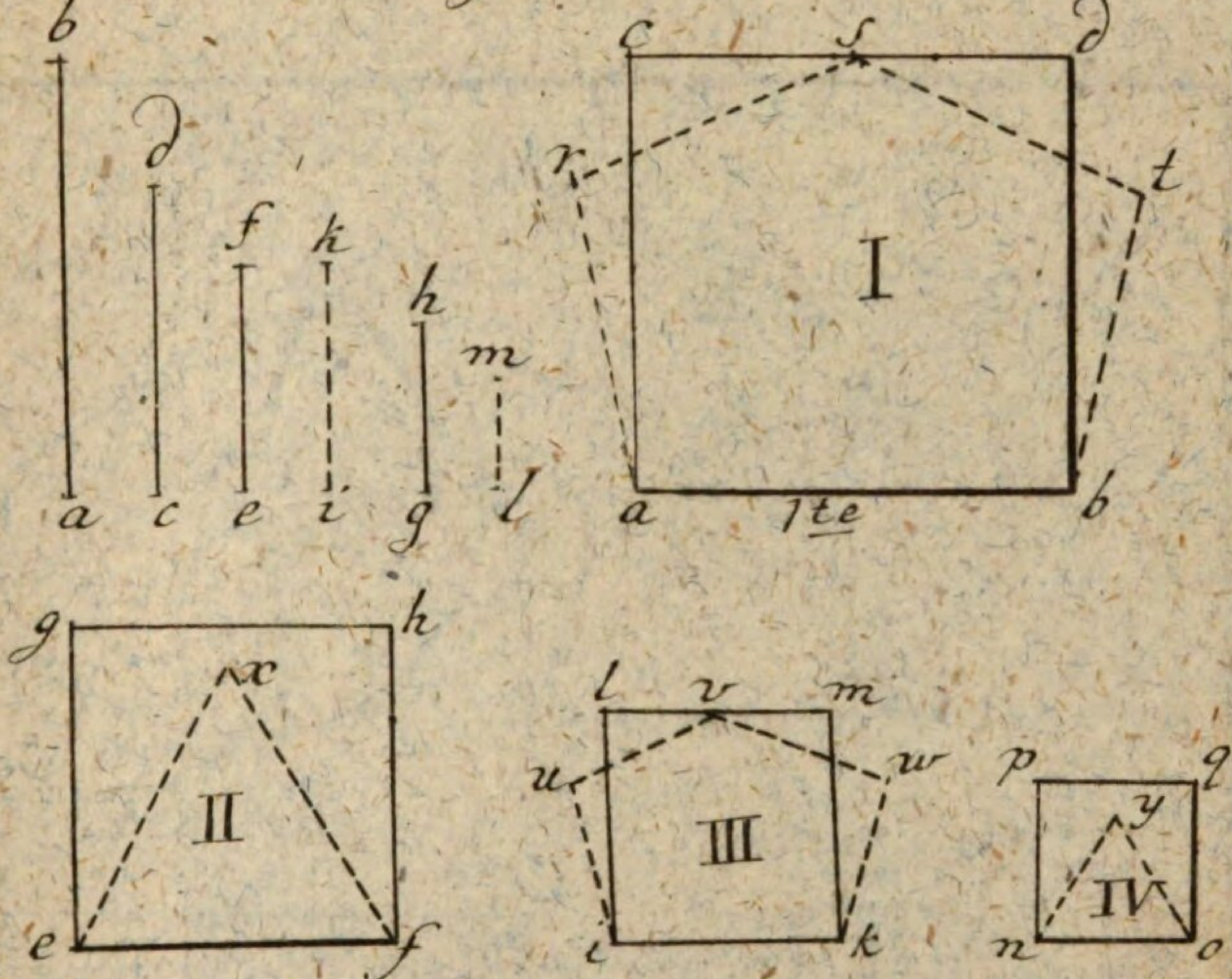


Fig. 57.

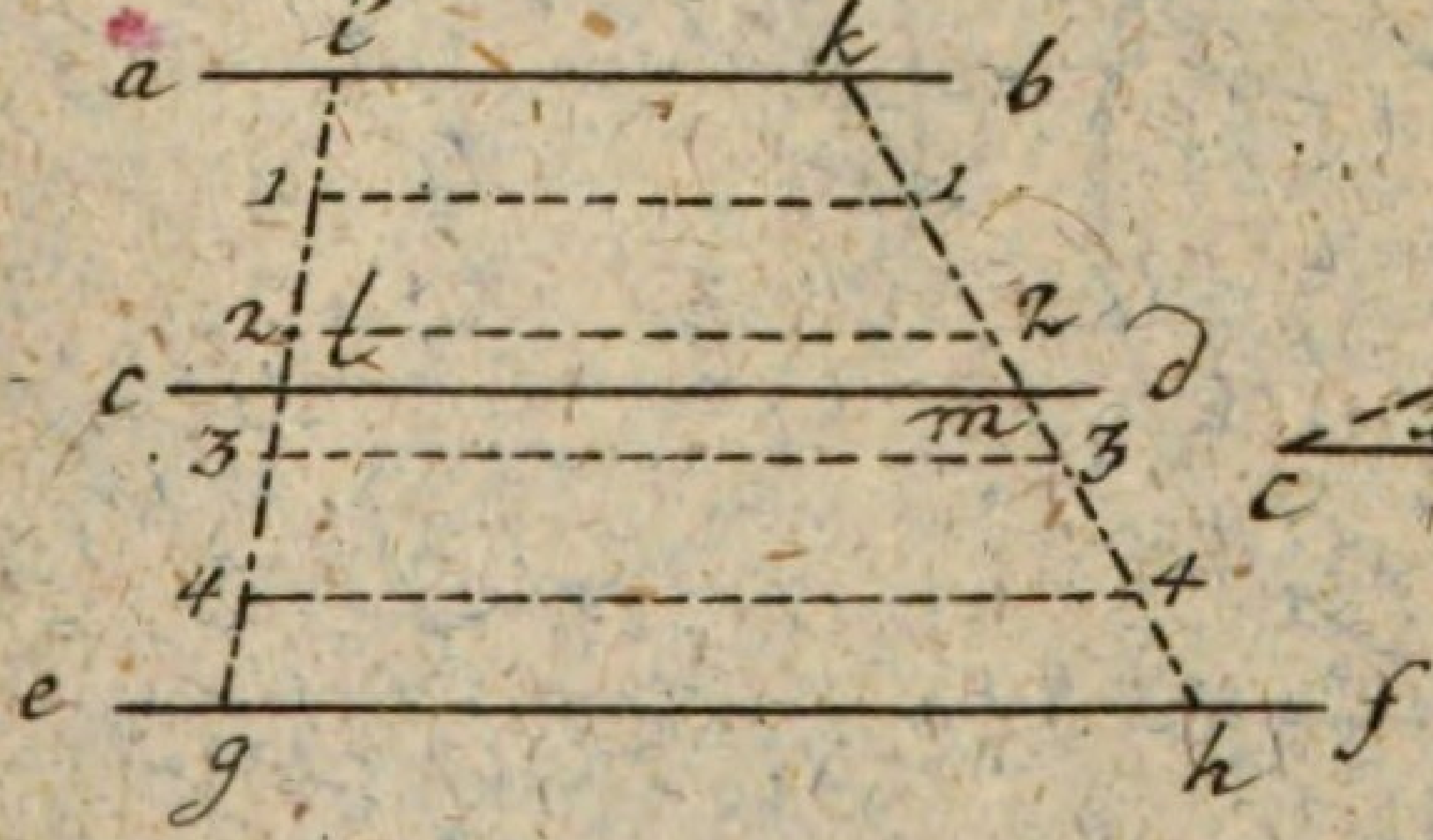


Fig. 58.

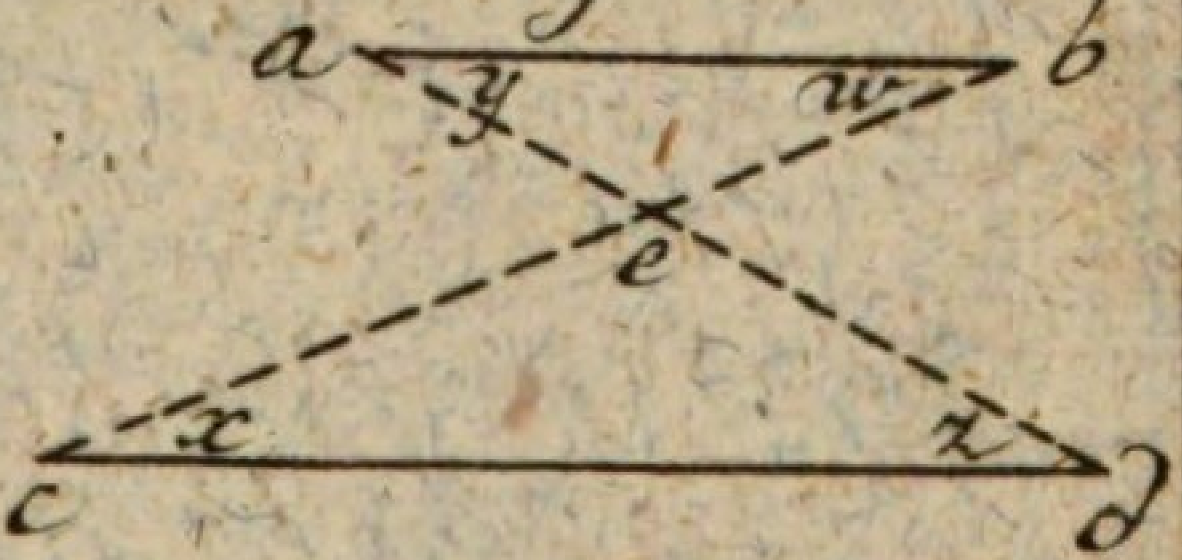


Fig. 59.

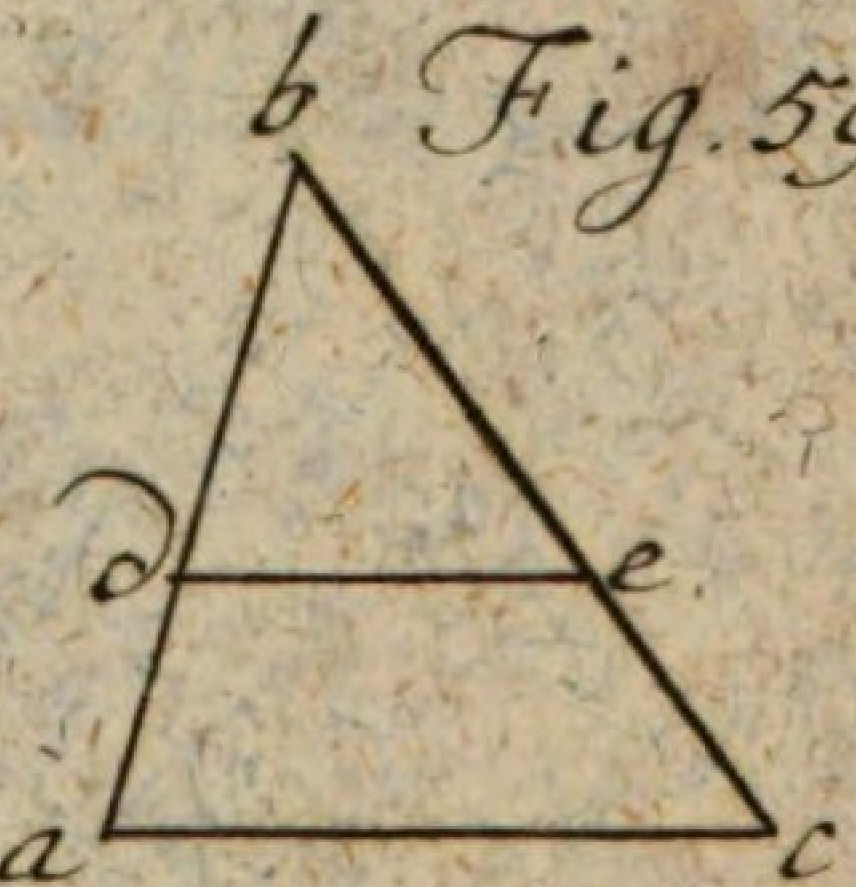
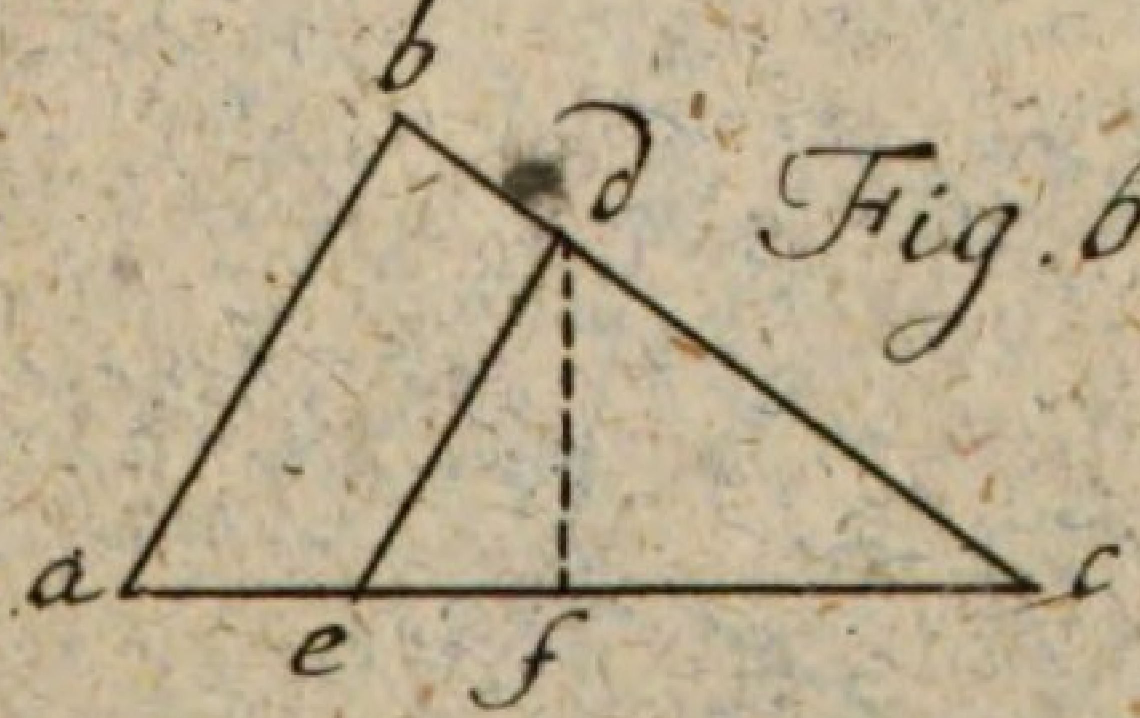


Fig. 60.



Tab. XII.

Fig. 61

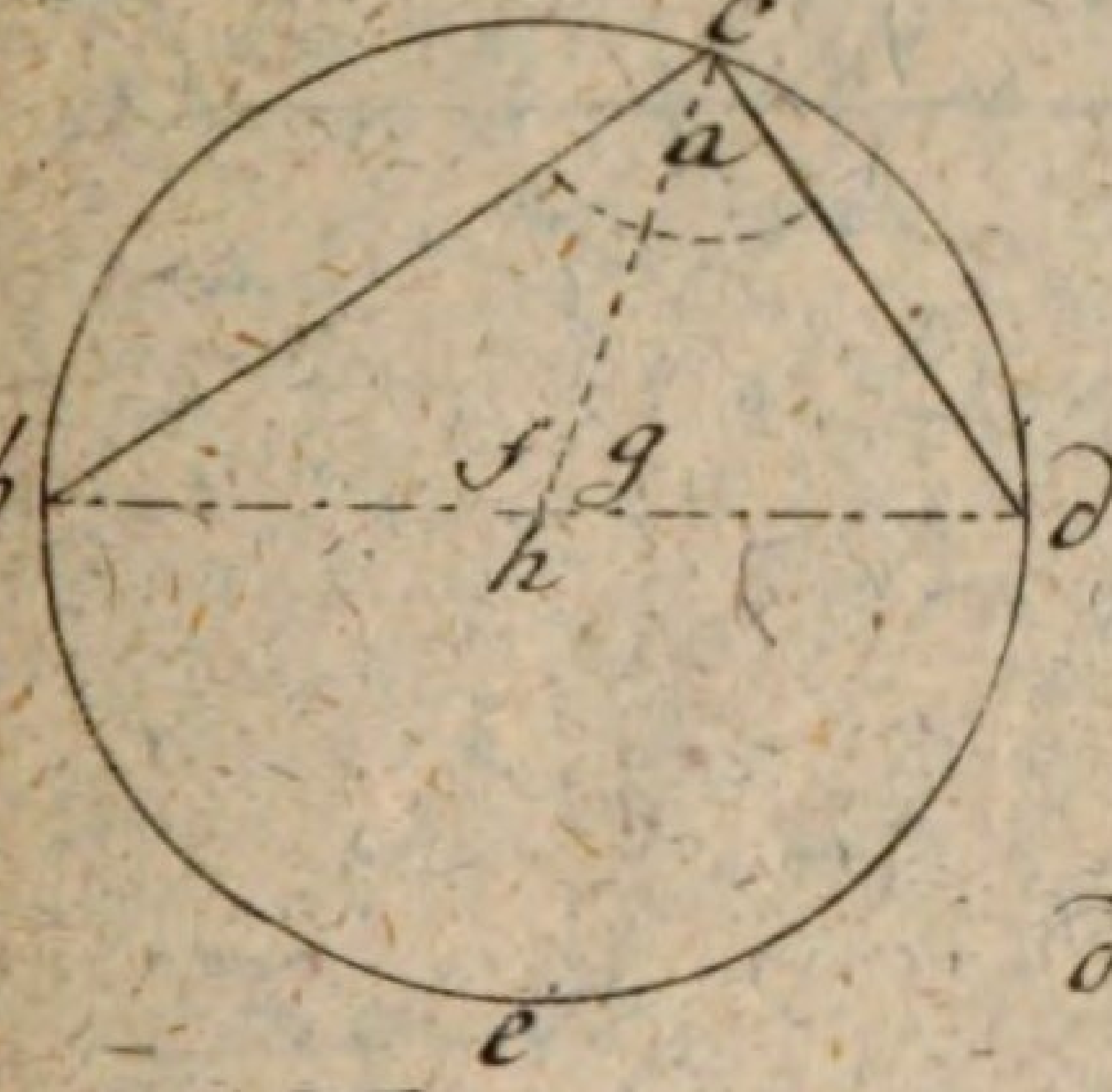


Fig. 62.

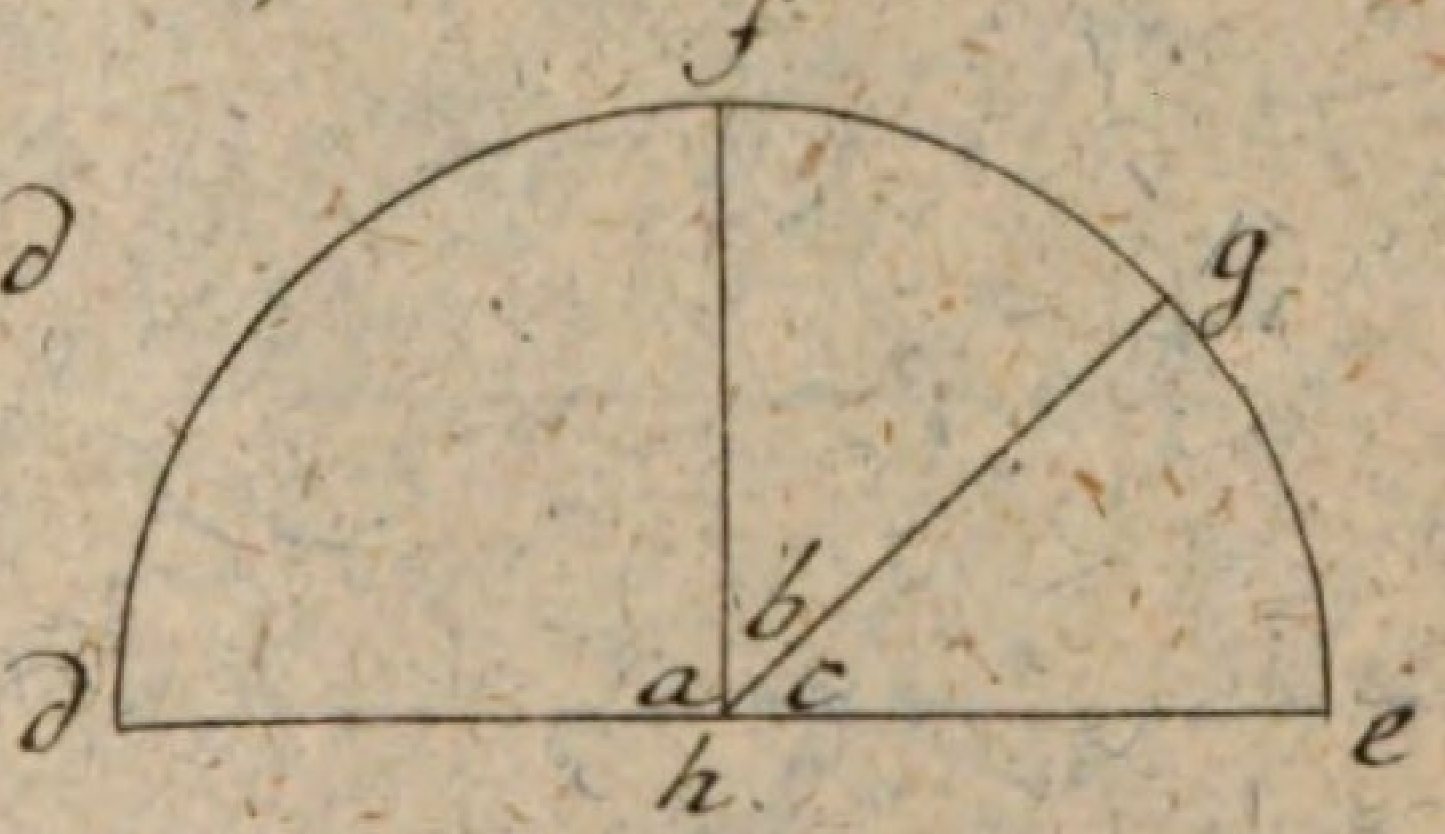


Fig. 63.

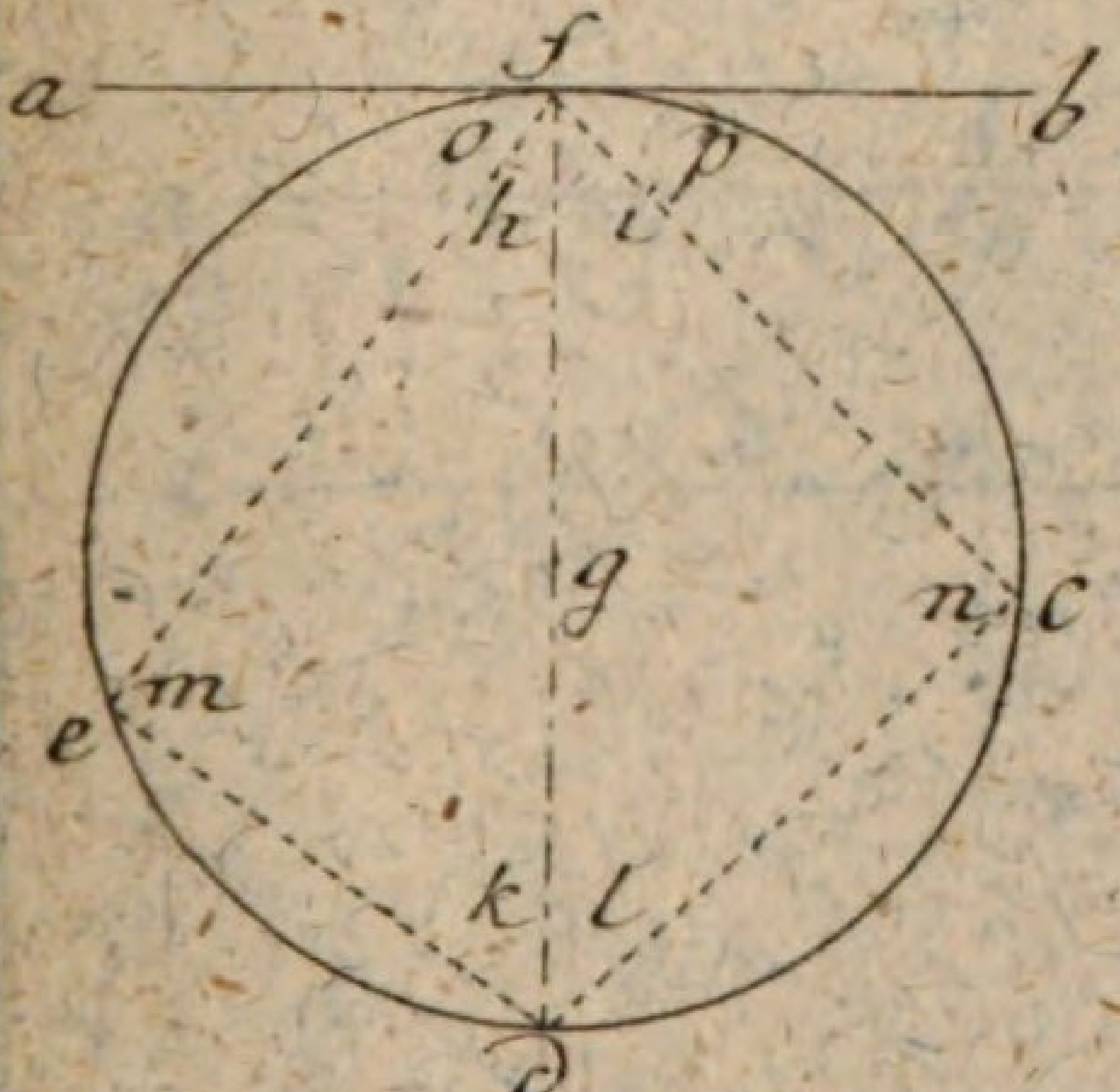


Fig. 64.

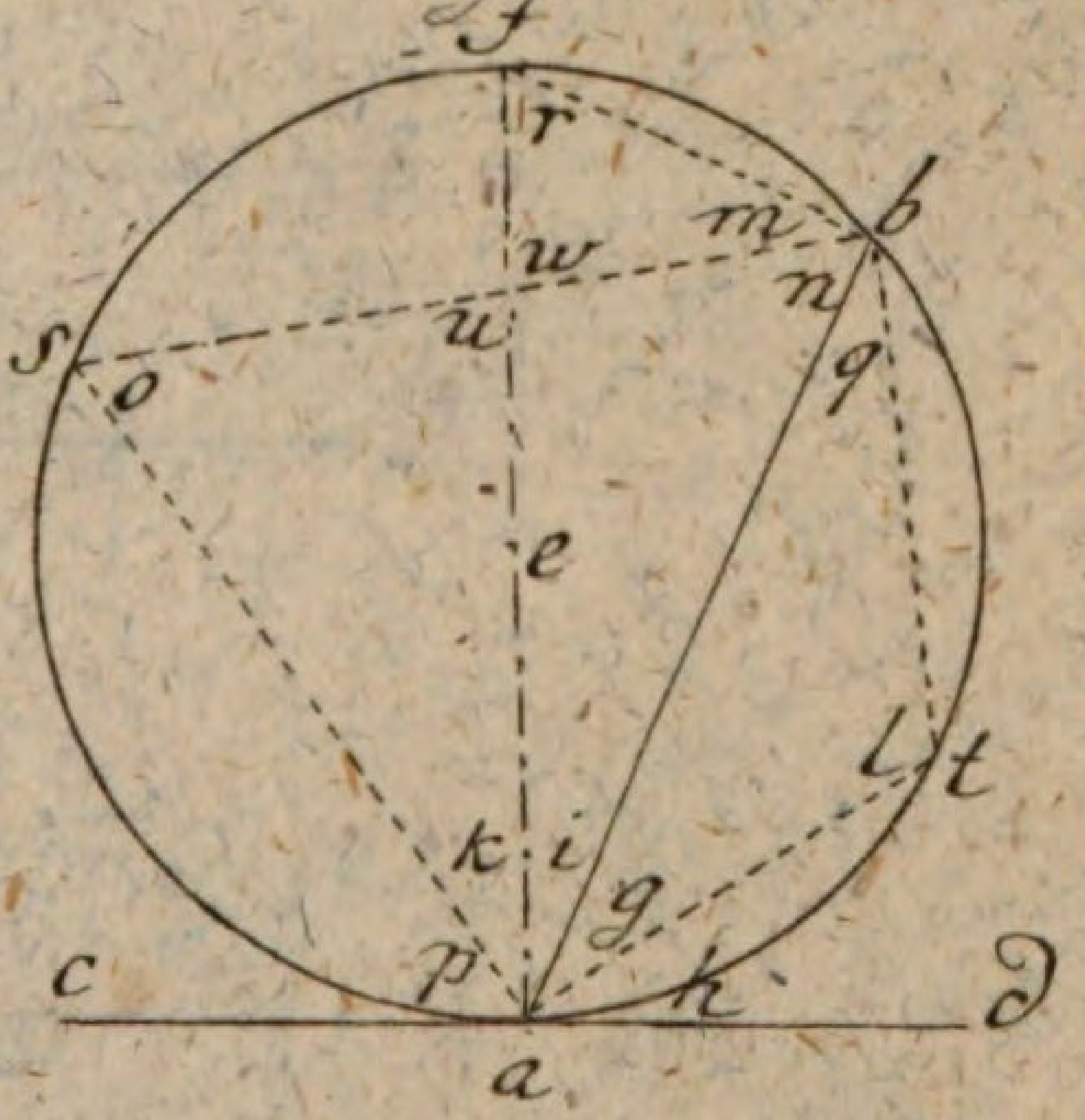
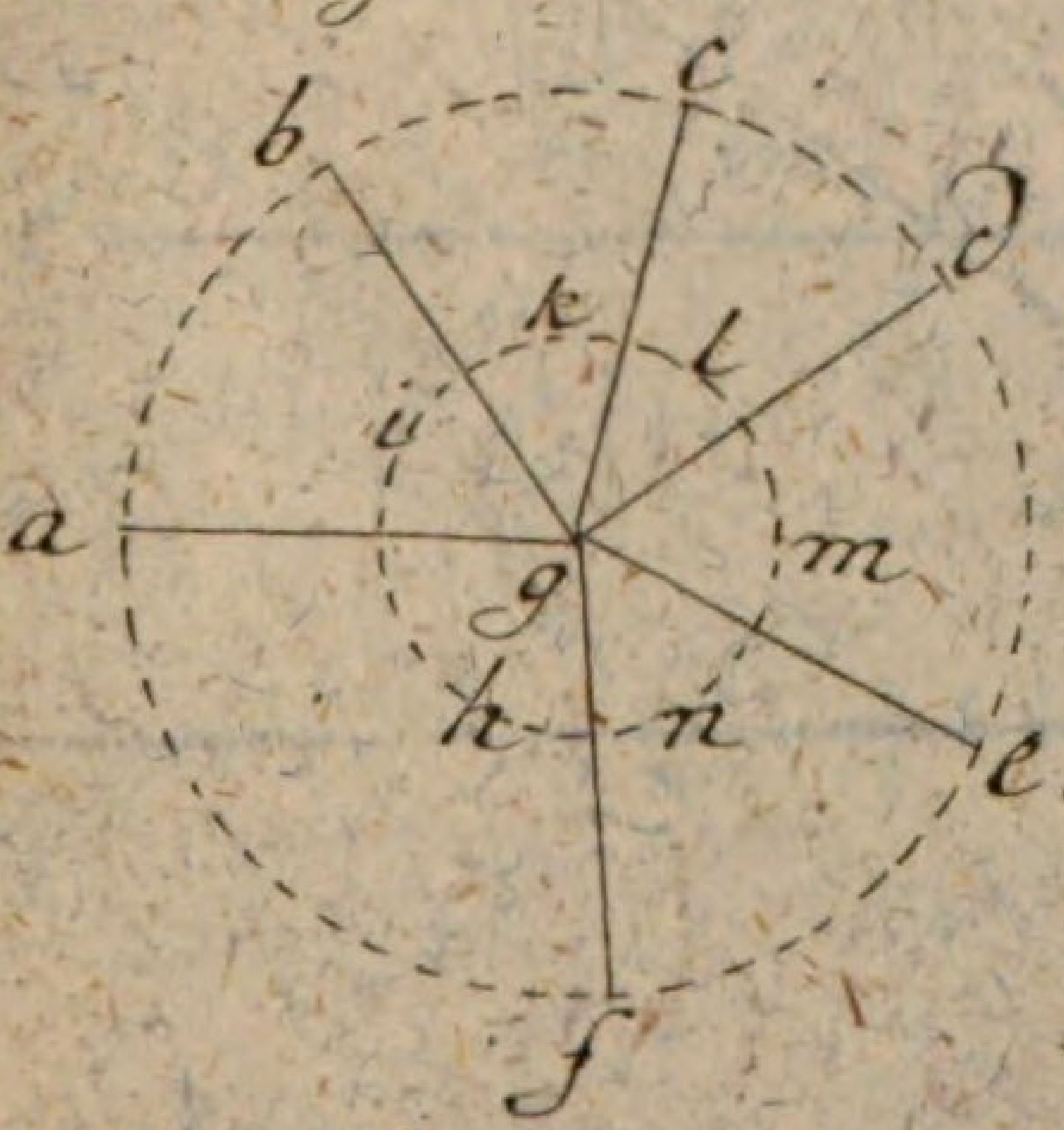
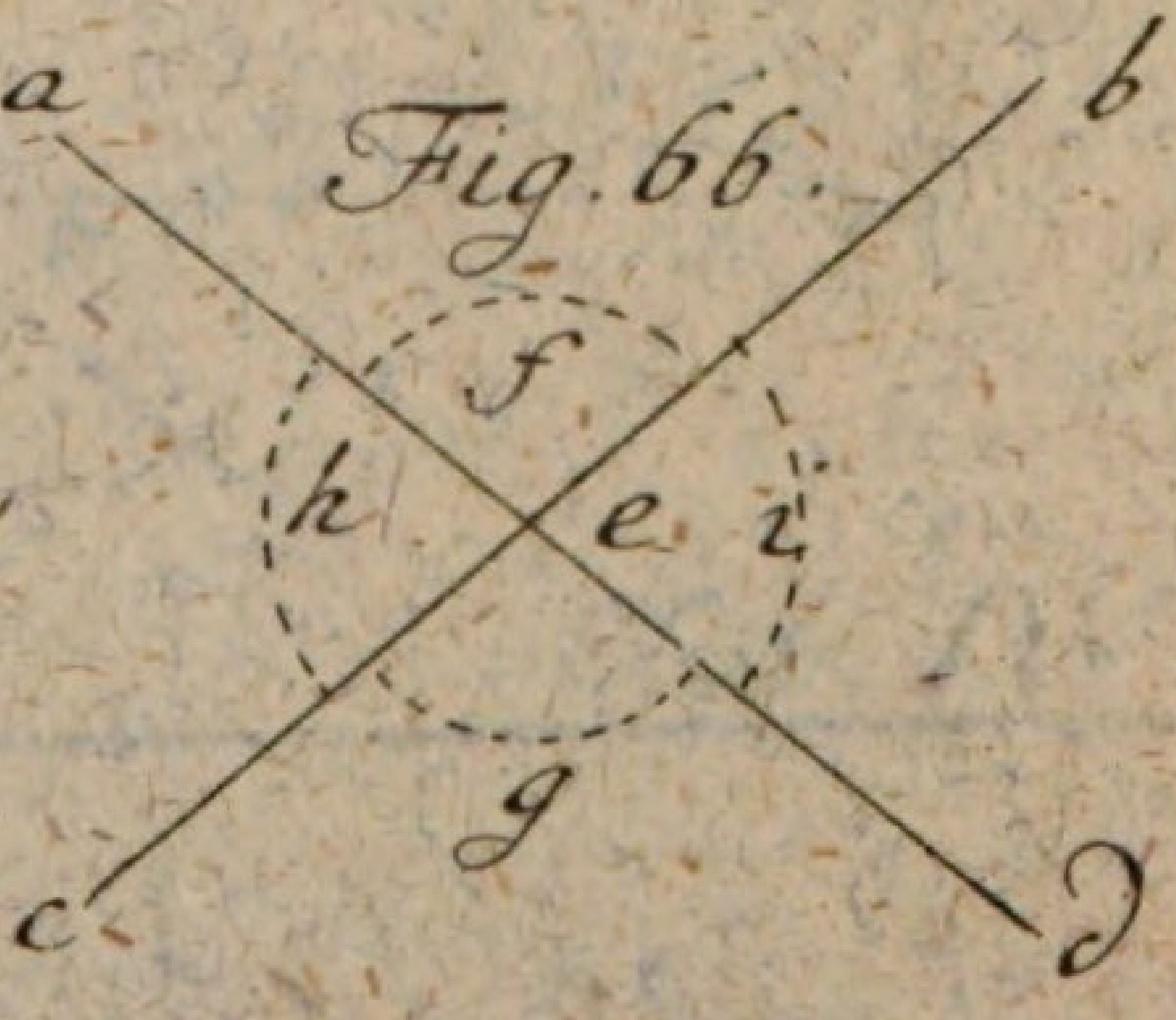


Fig. 65.





Tab. XIII.

Fig. 67.

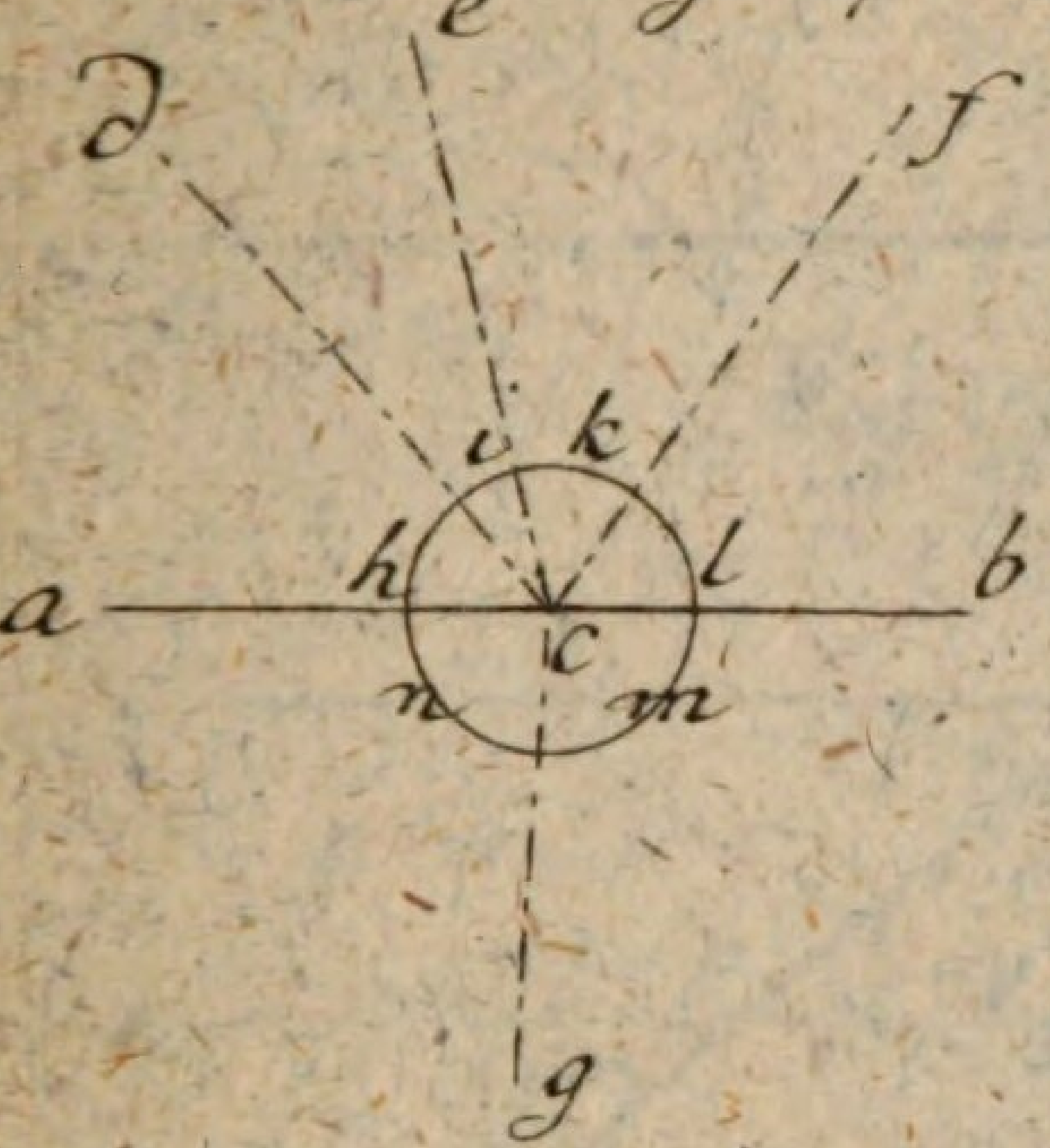


Fig. 68.

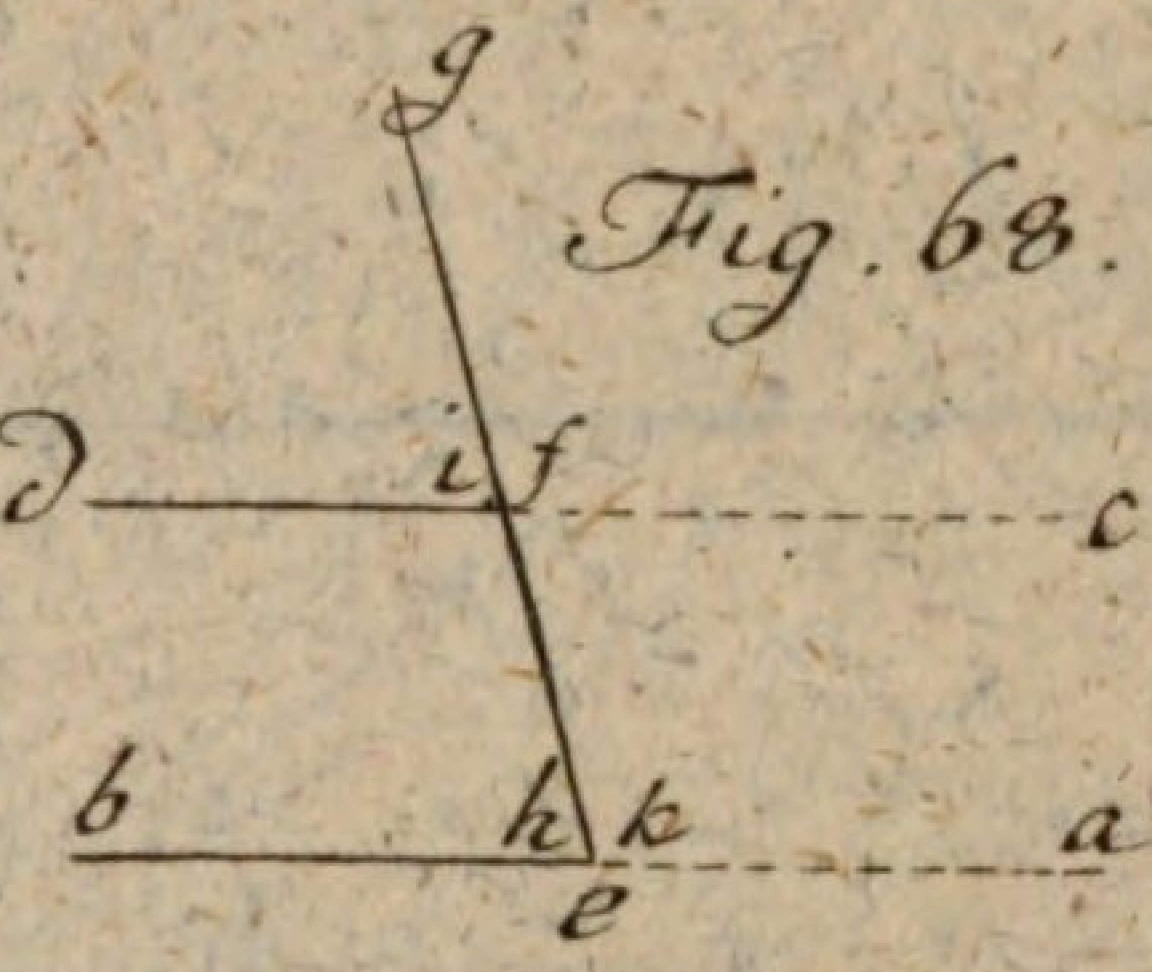


Fig. 69.

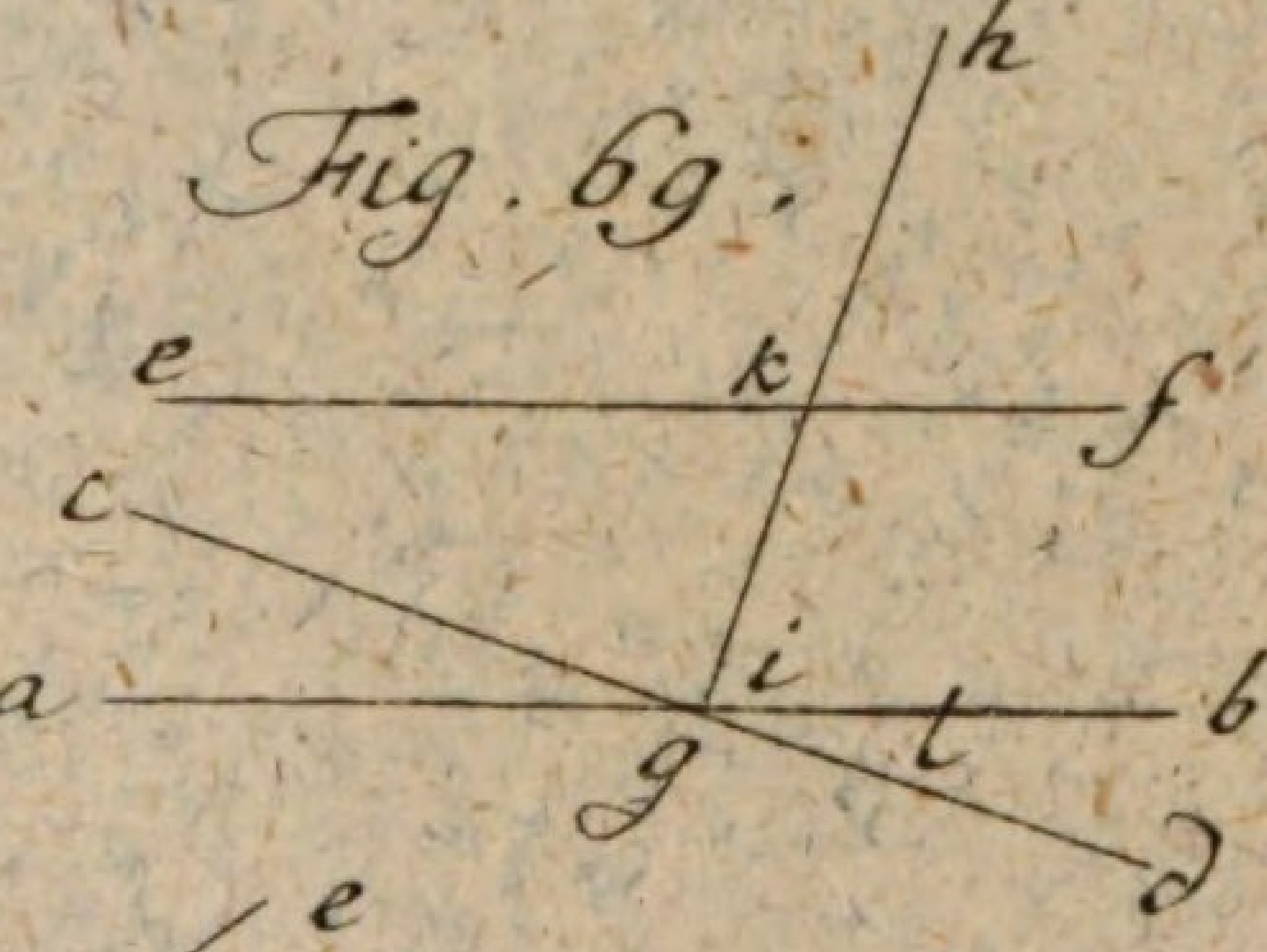


Fig. 70.

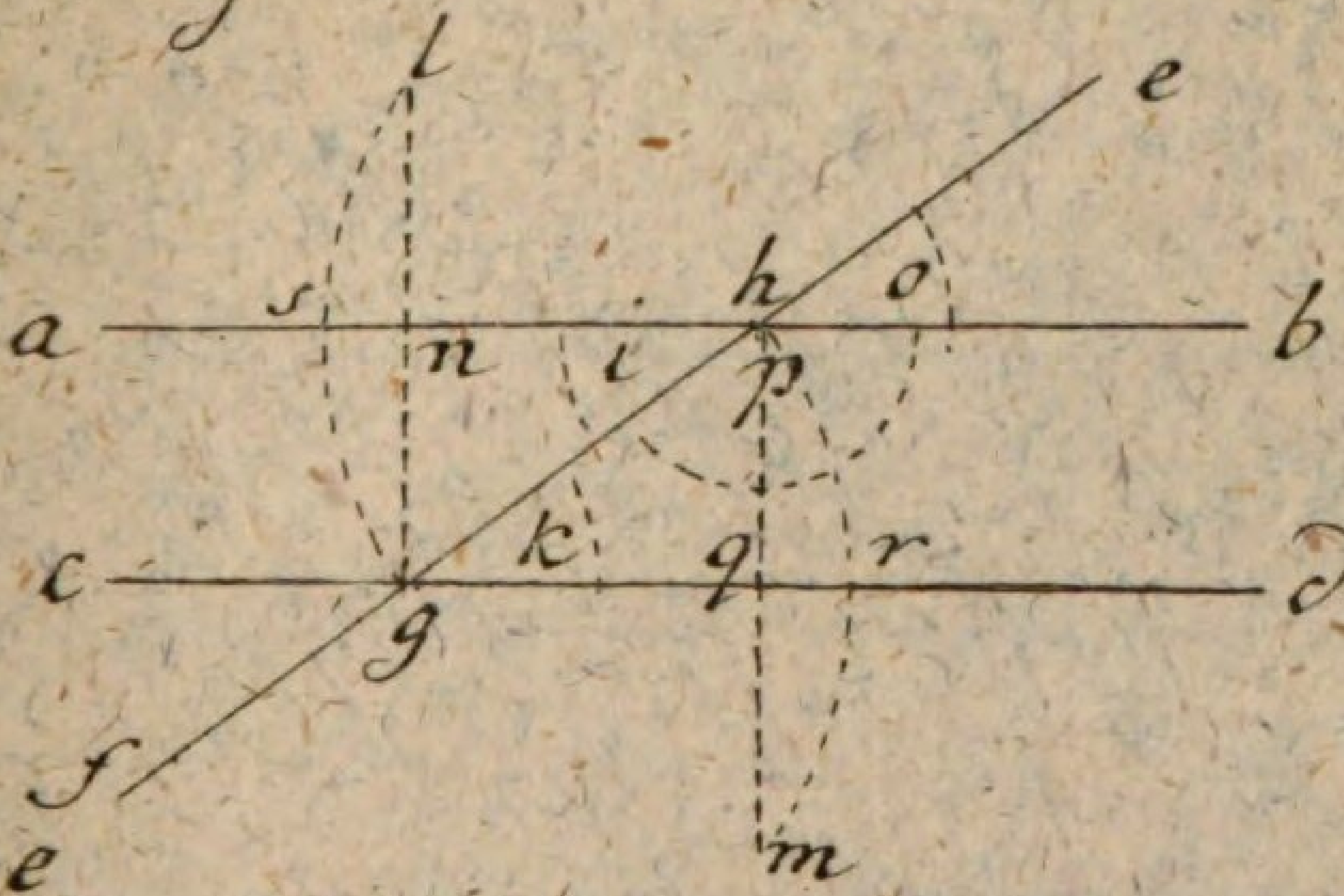
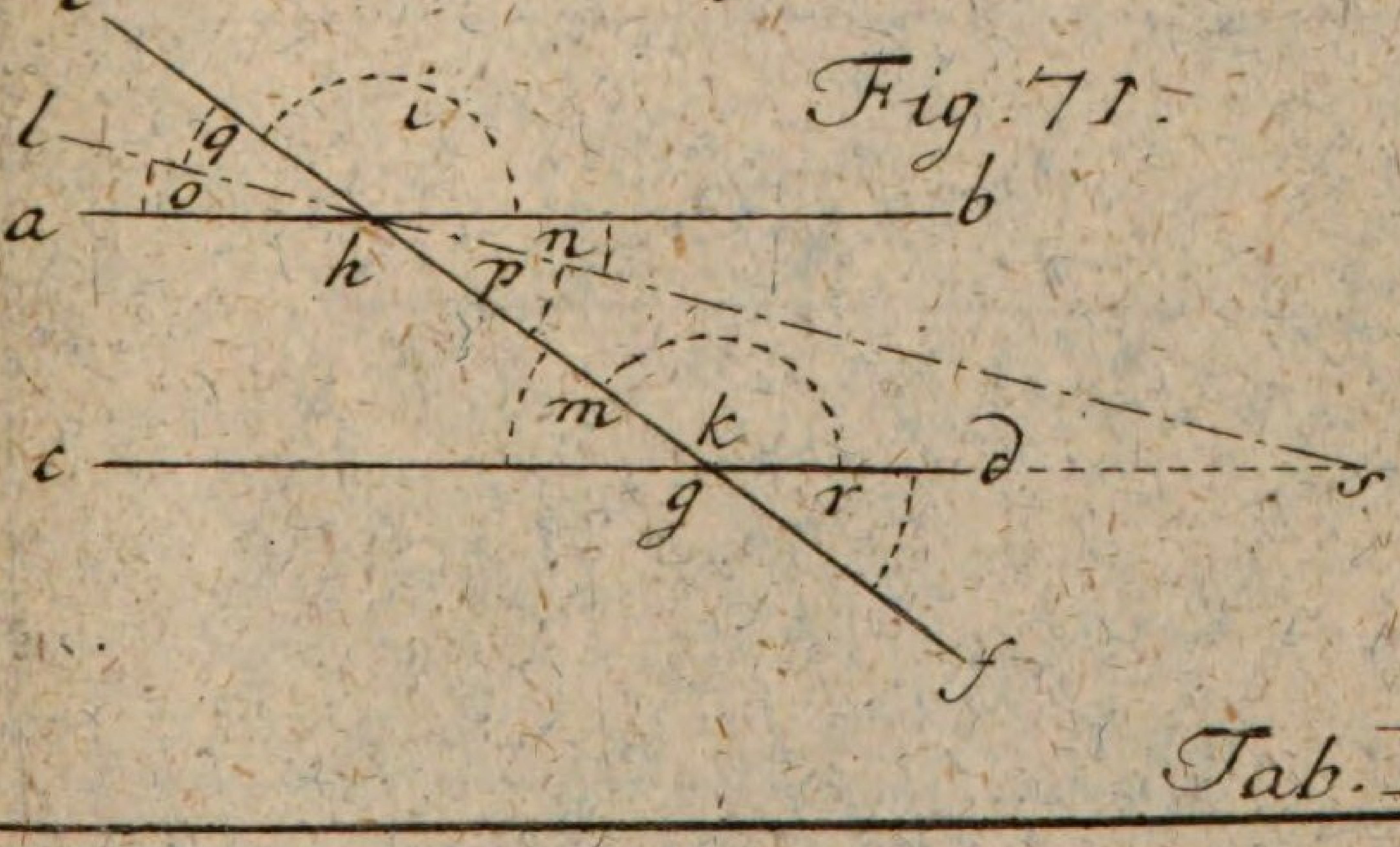


Fig. 71.



Tab. XIV.

Fig. 72.

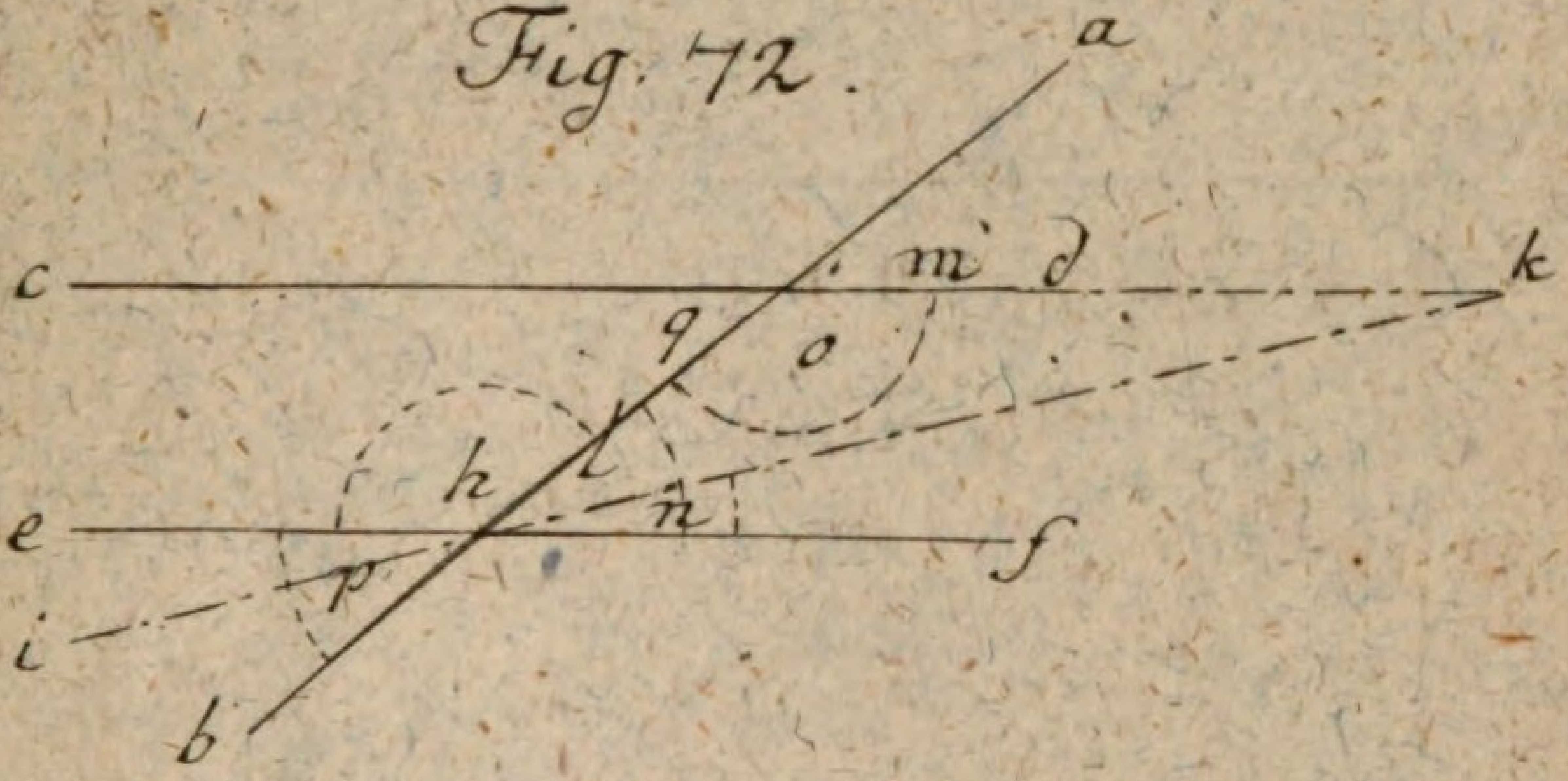


Fig. 73.

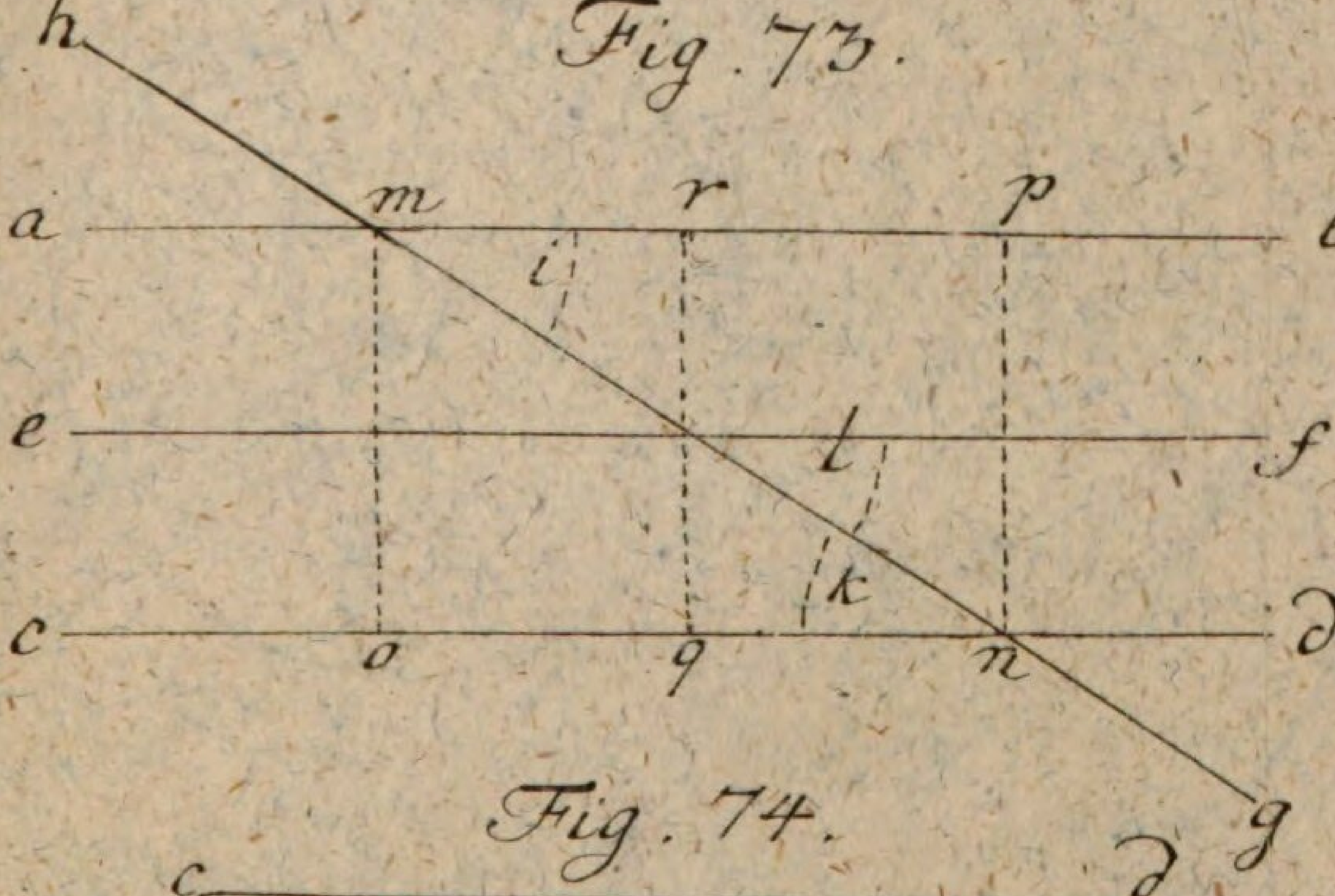
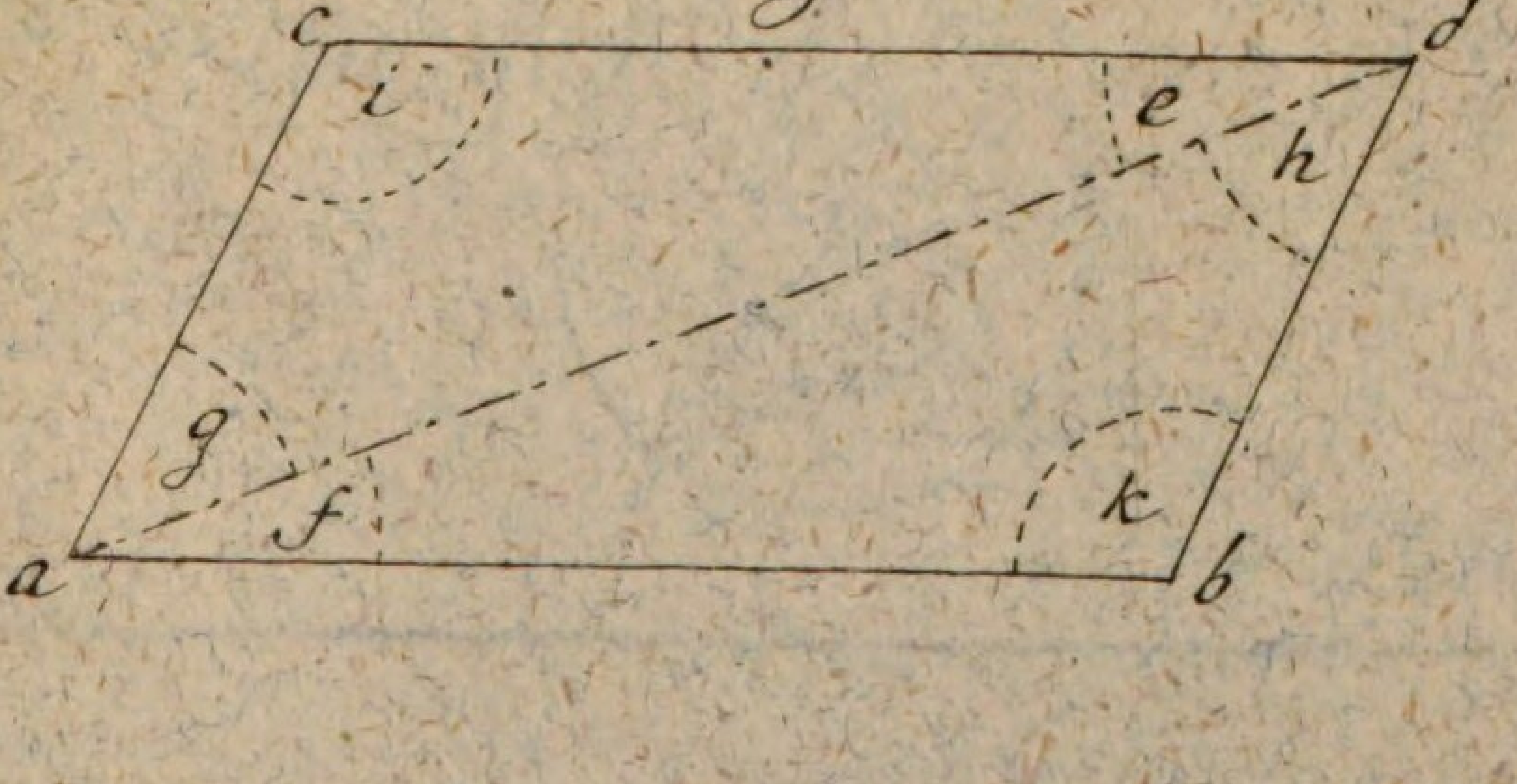


Fig. 74.



Tab. XV.

Fig. 75.

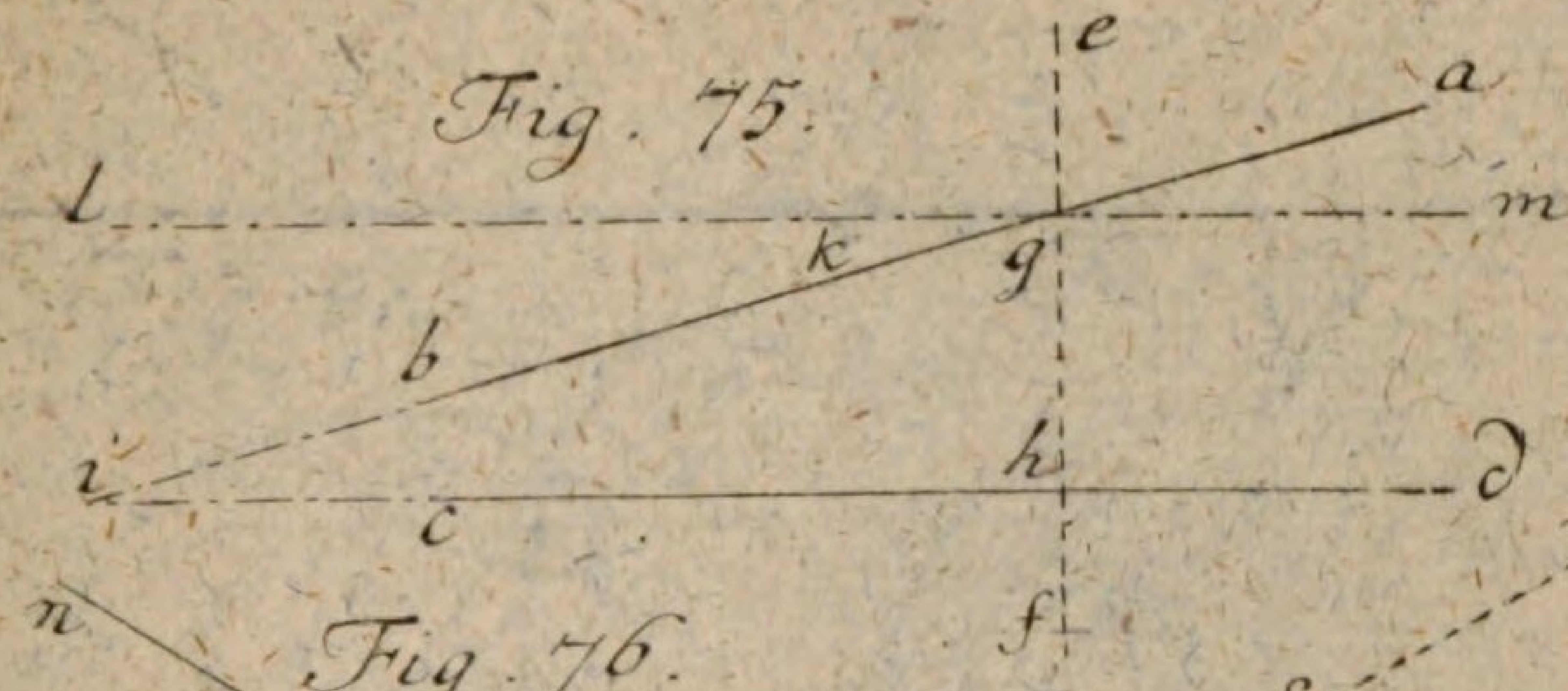


Fig. 76.

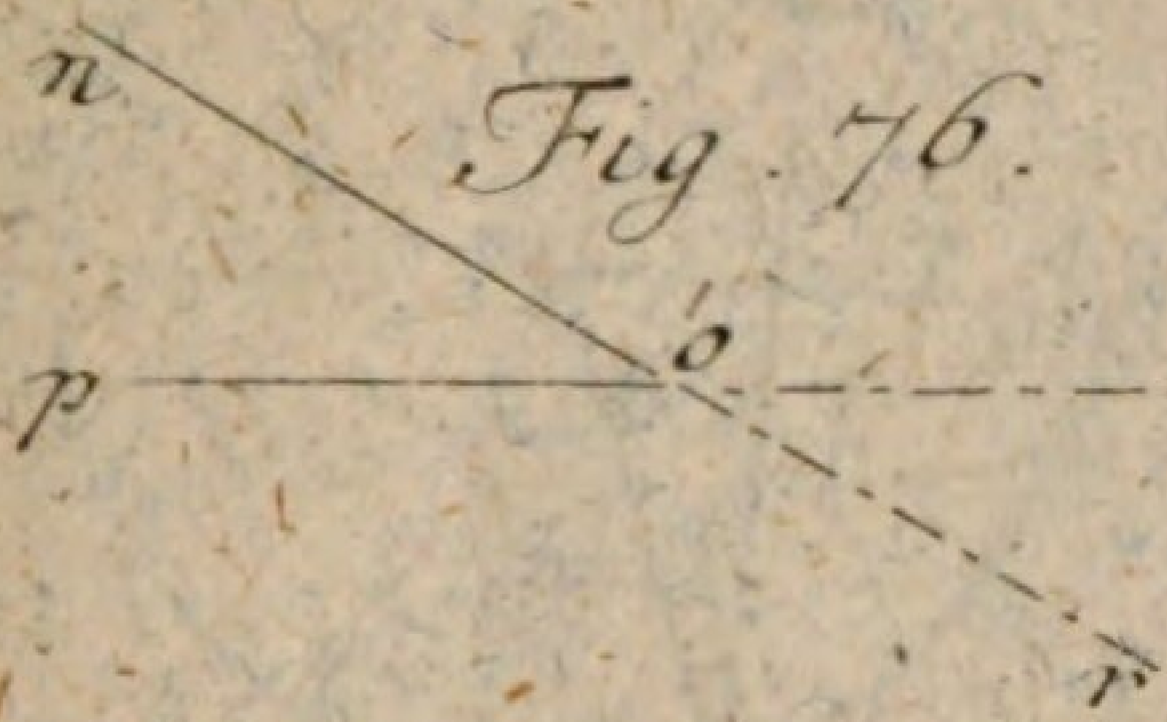


Fig. 77.

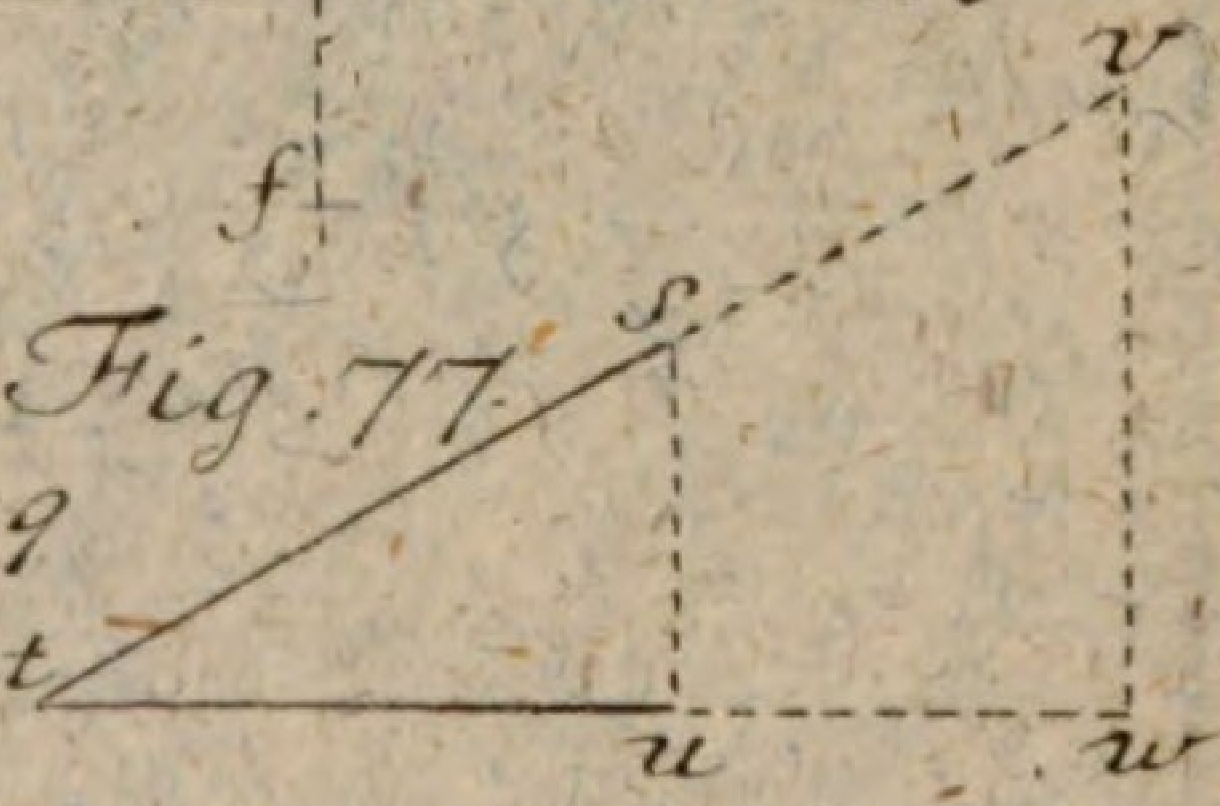


Fig. 78.

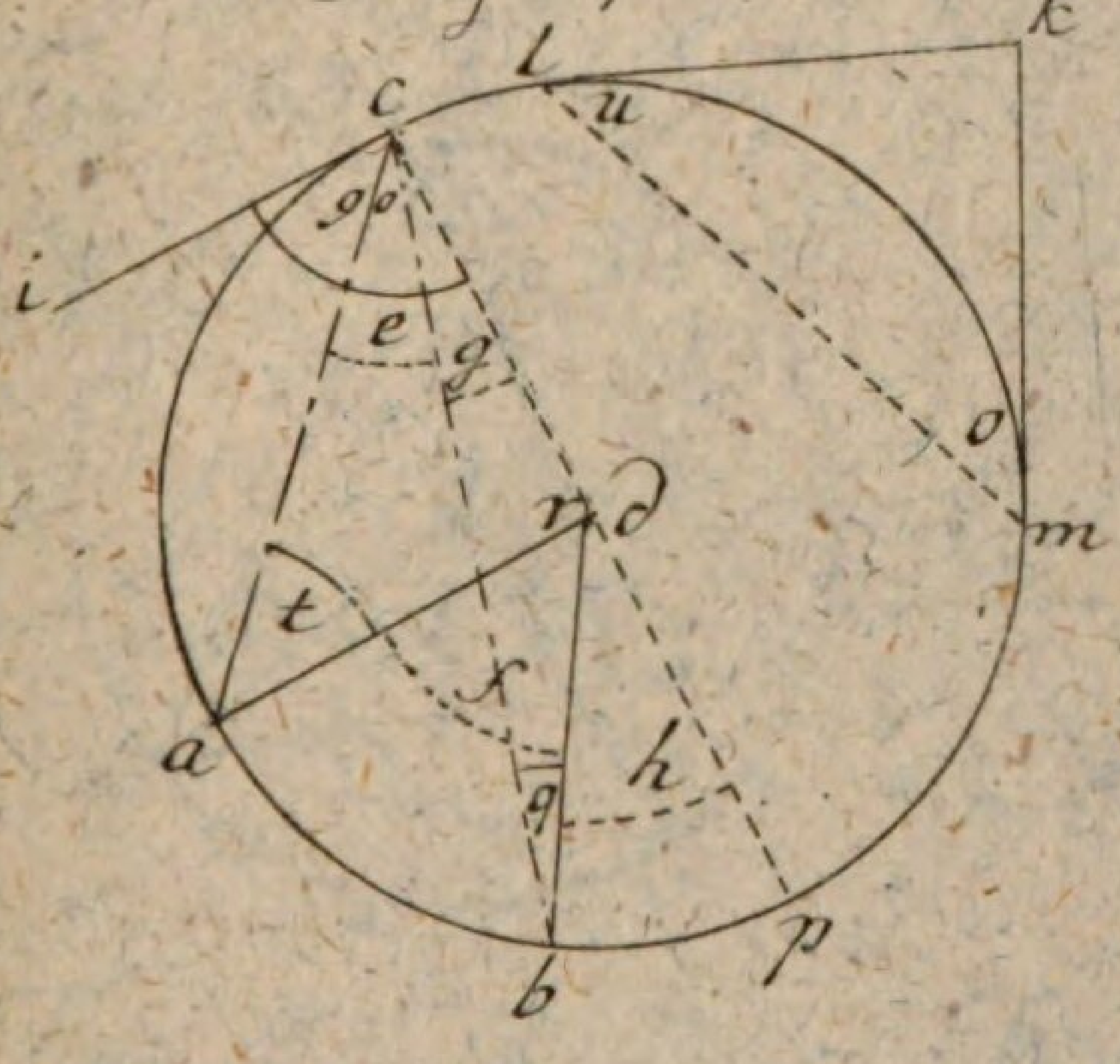


Fig. 79.

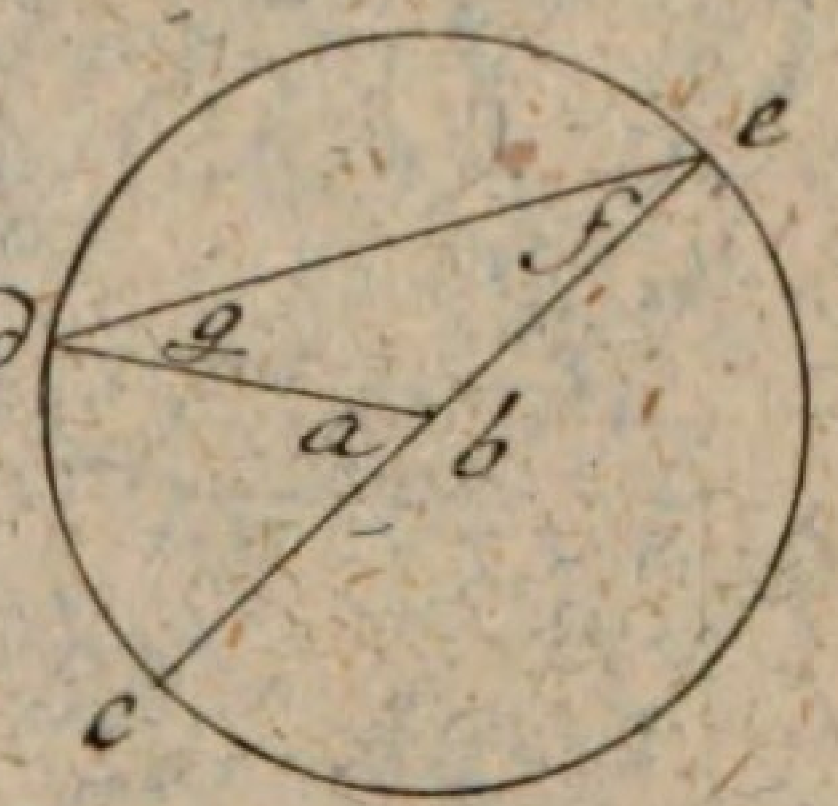
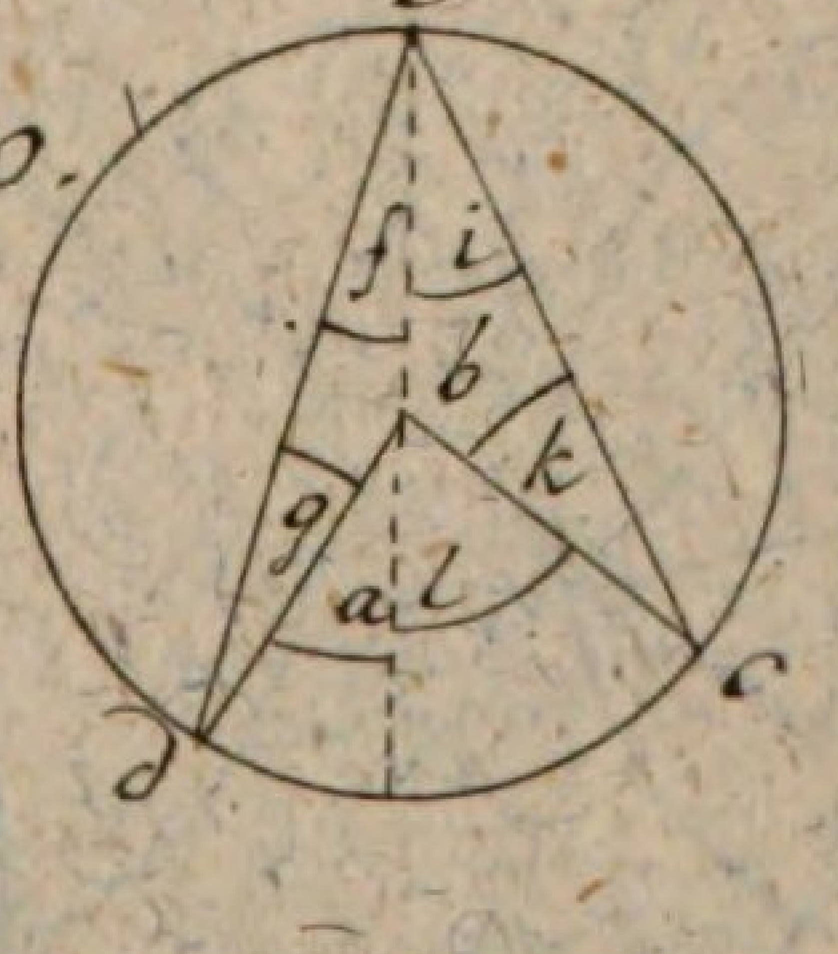


Fig. 80.



Tab. XVI

Fig. 81.

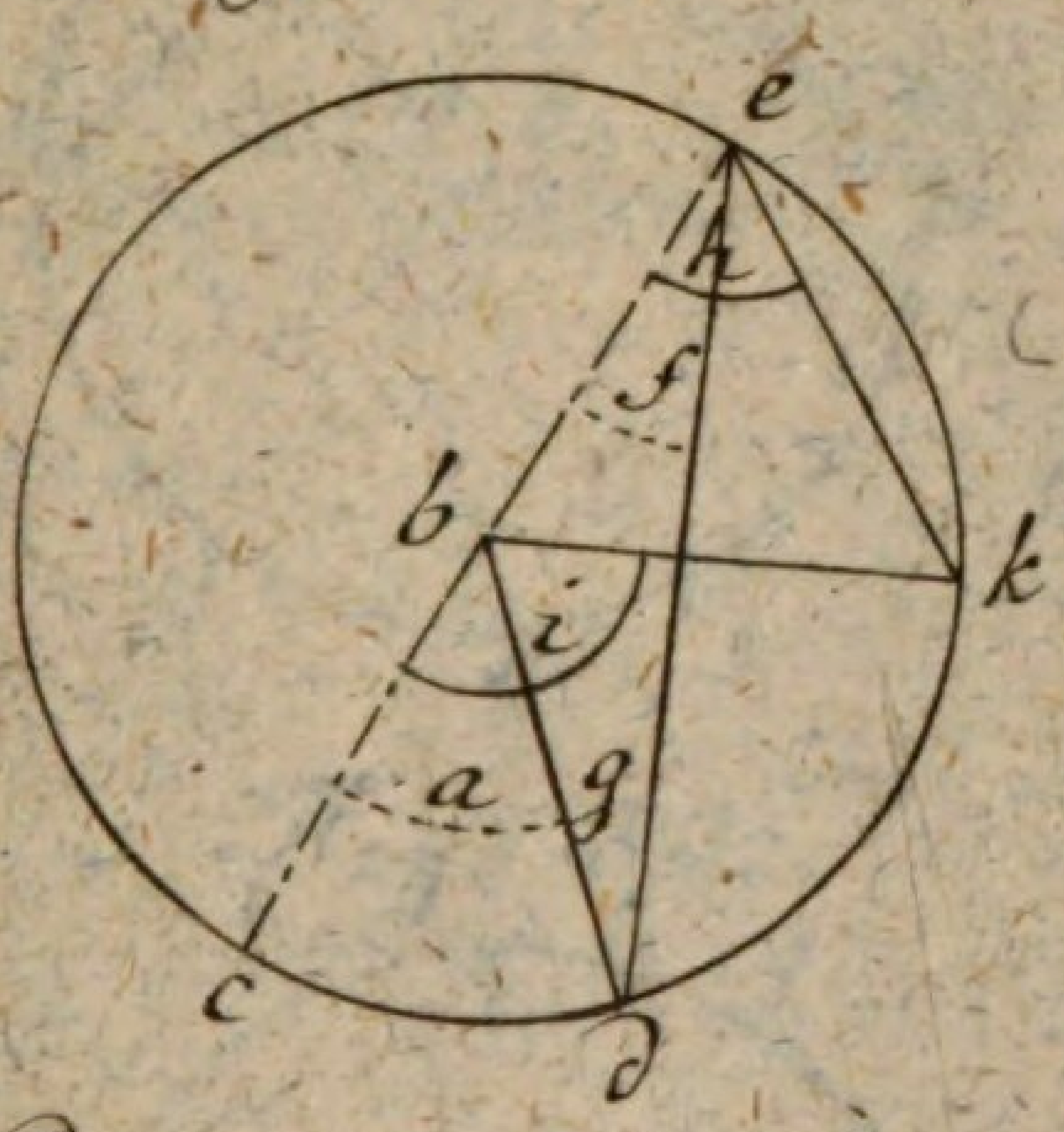


Fig: 82

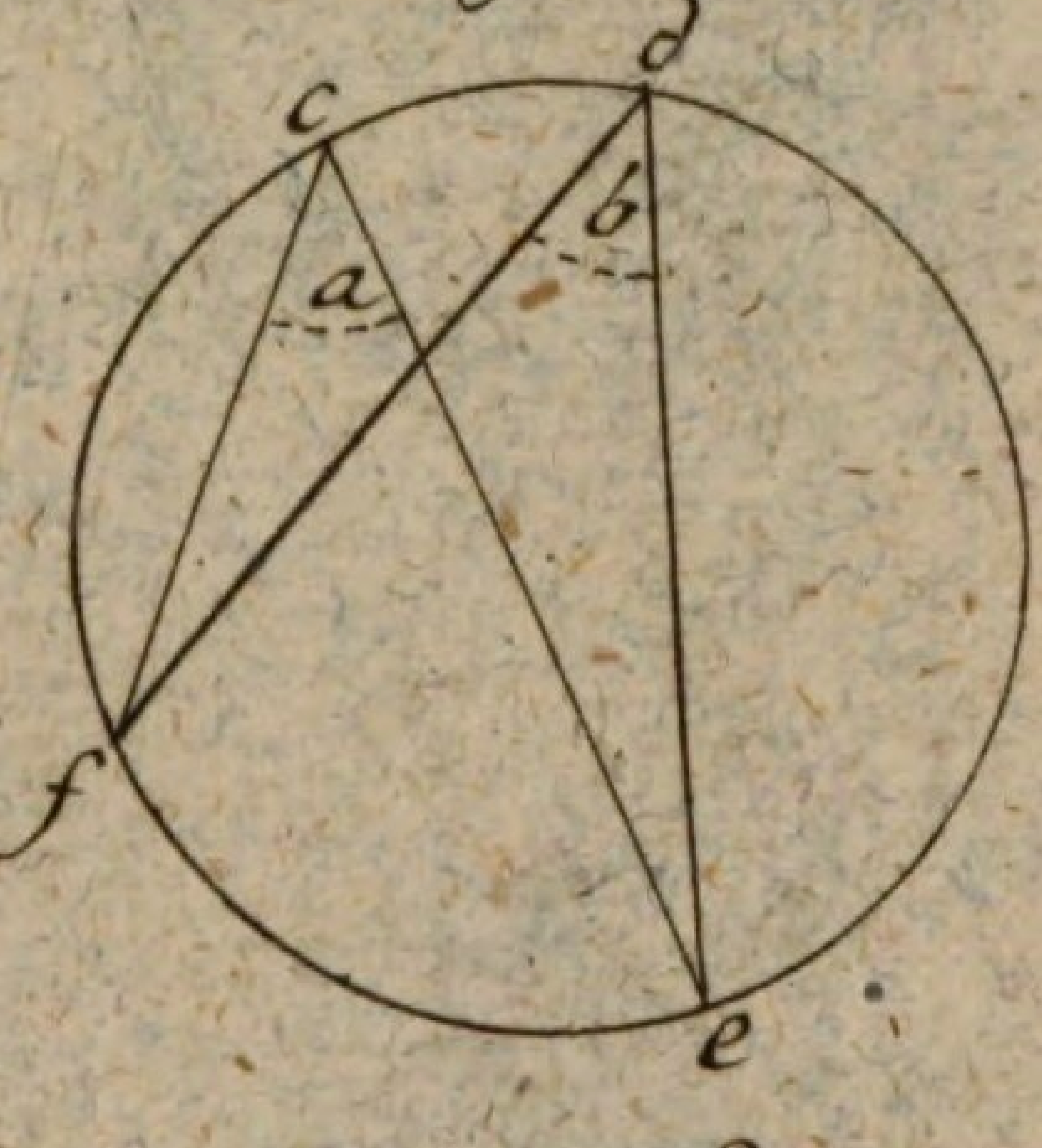


Fig. 83.

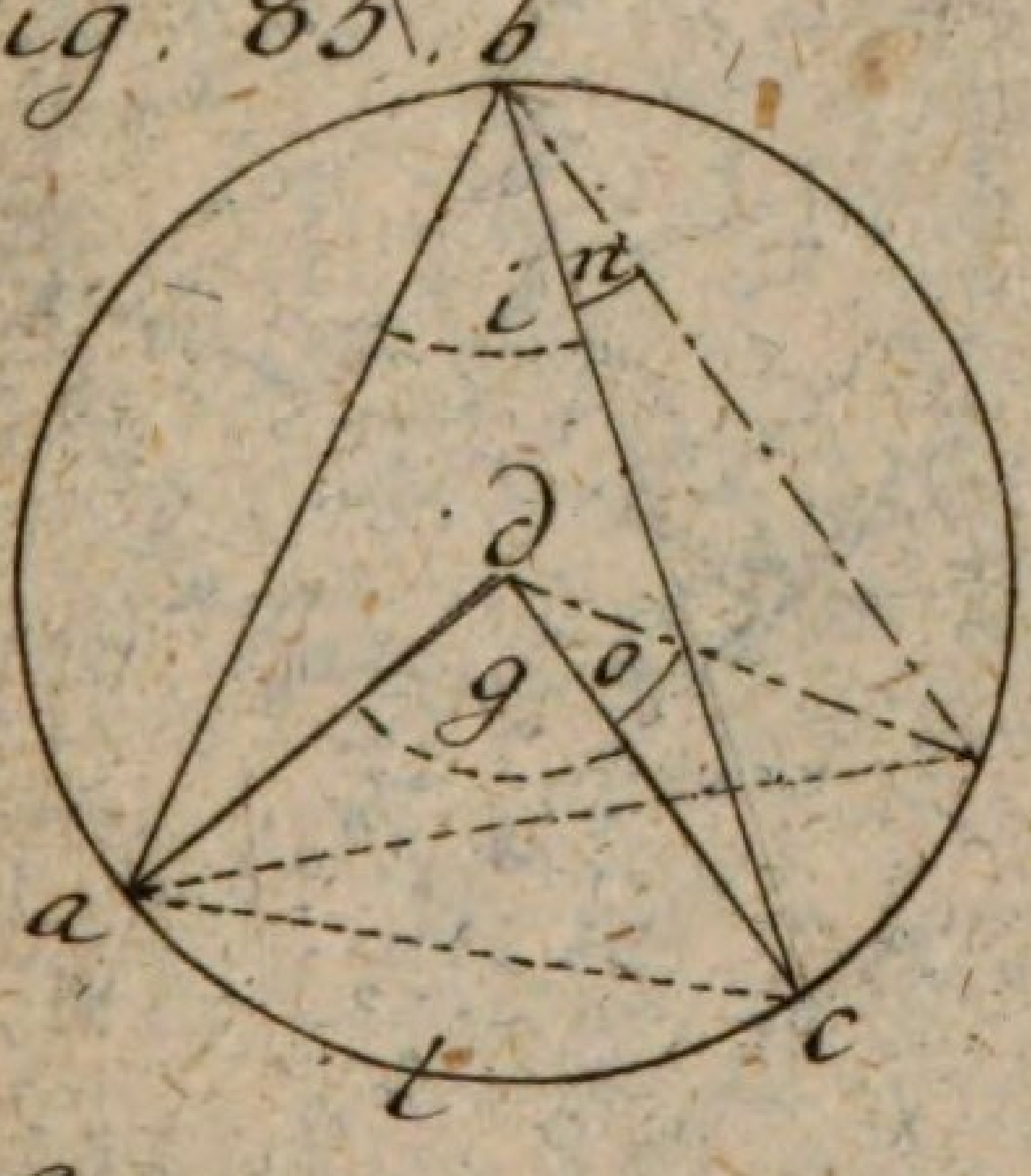


Fig. 84.

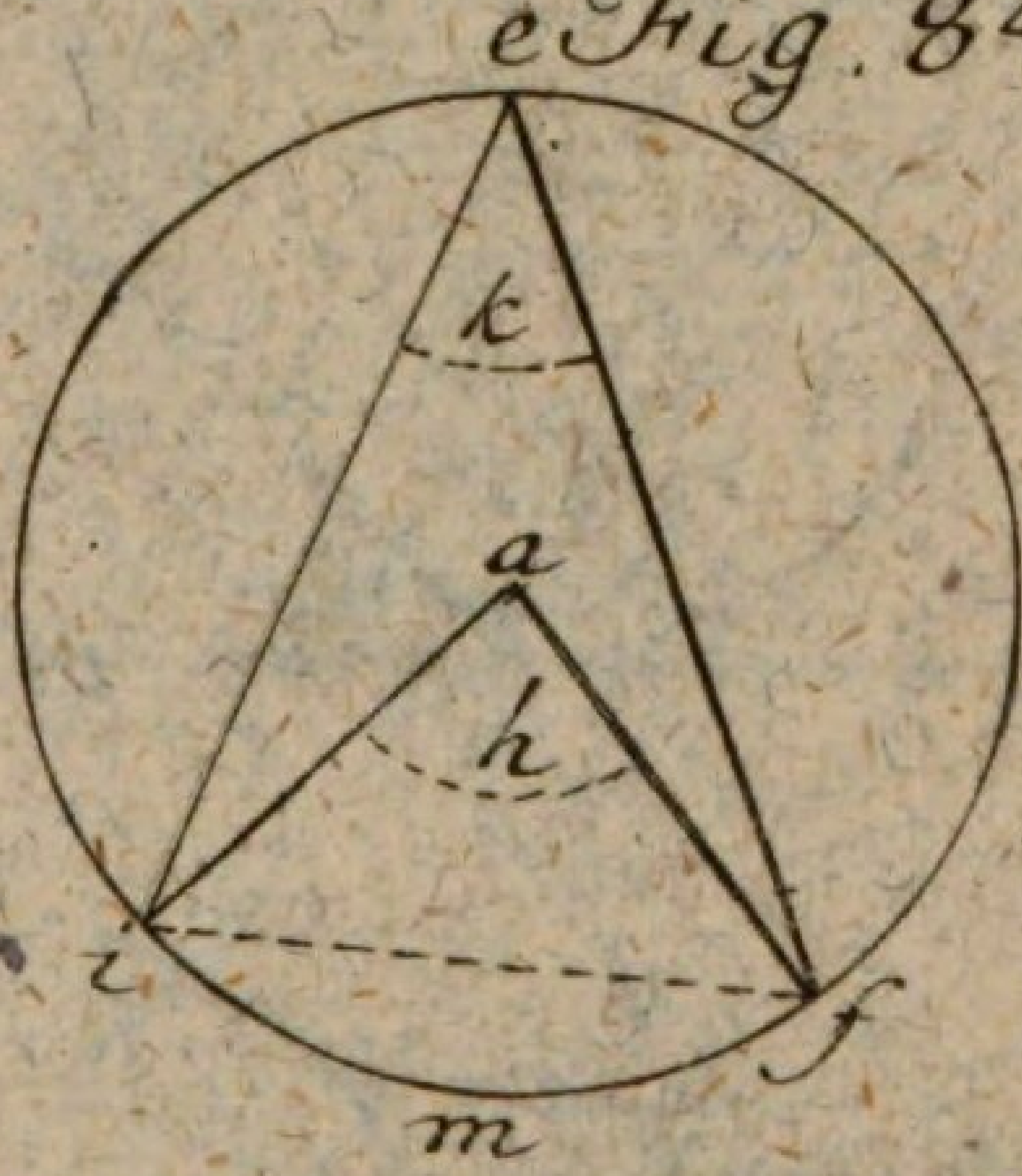


Fig. 85.

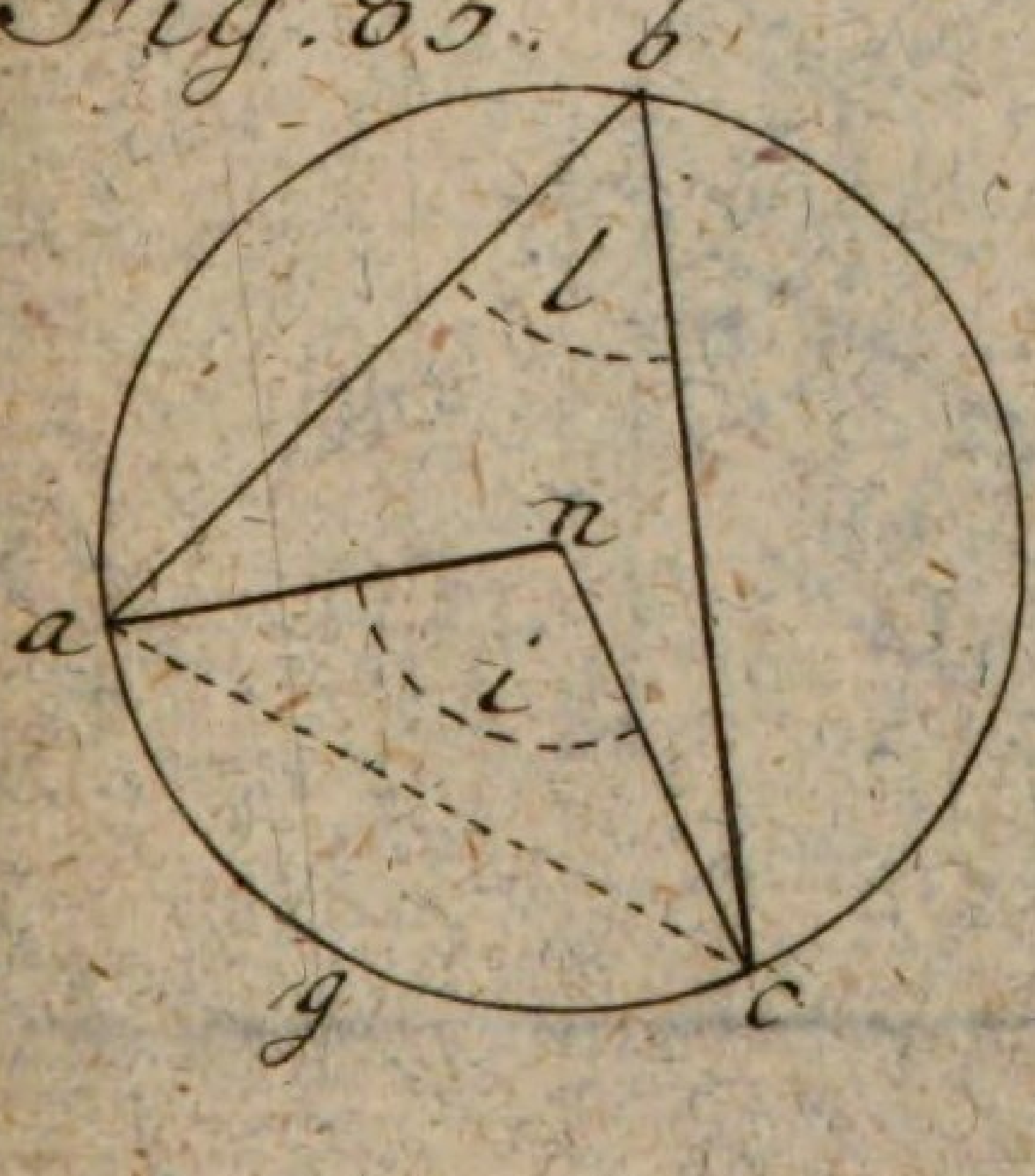
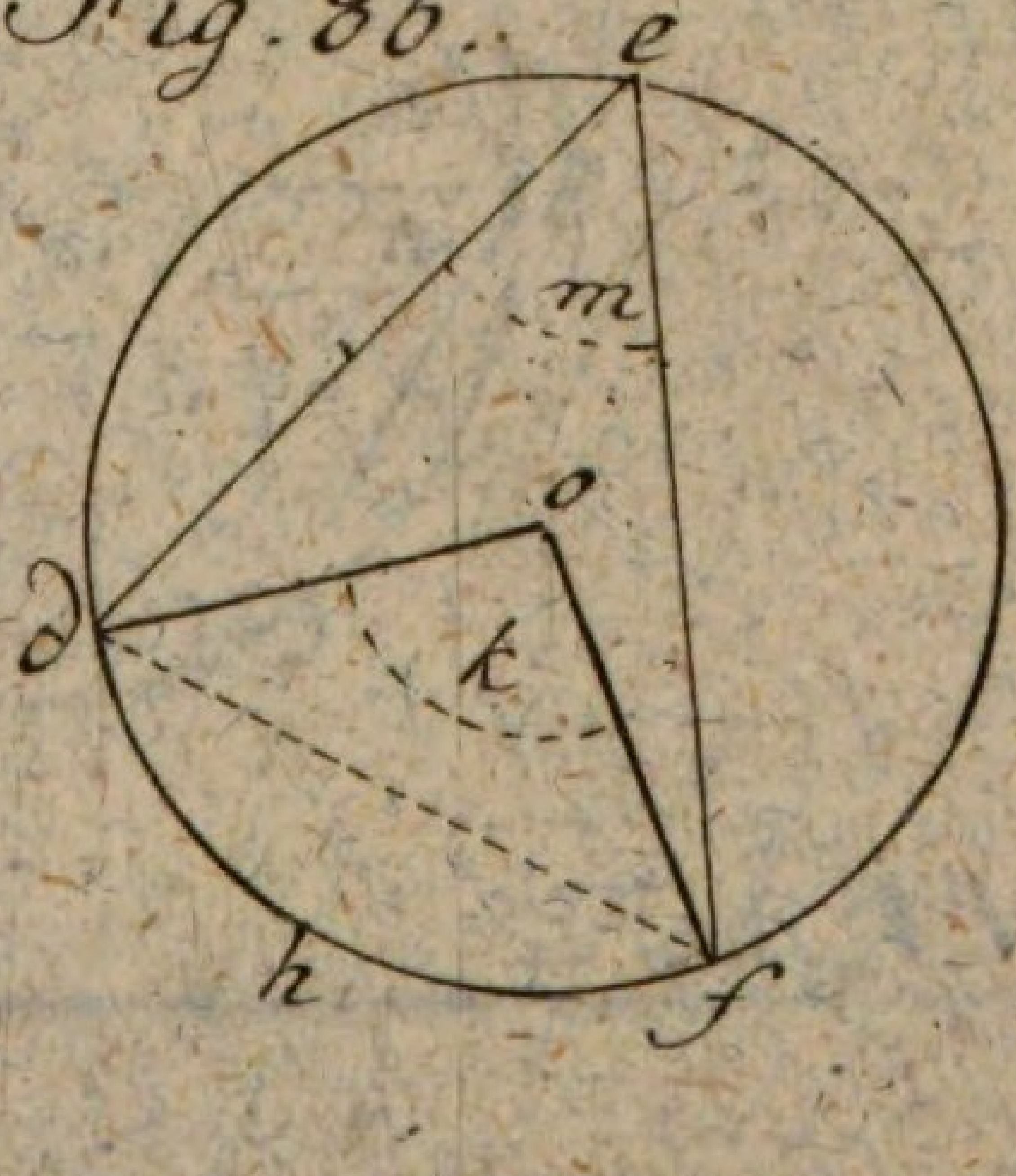


Fig. 86.



Tab. XVII.

Fig. 87.

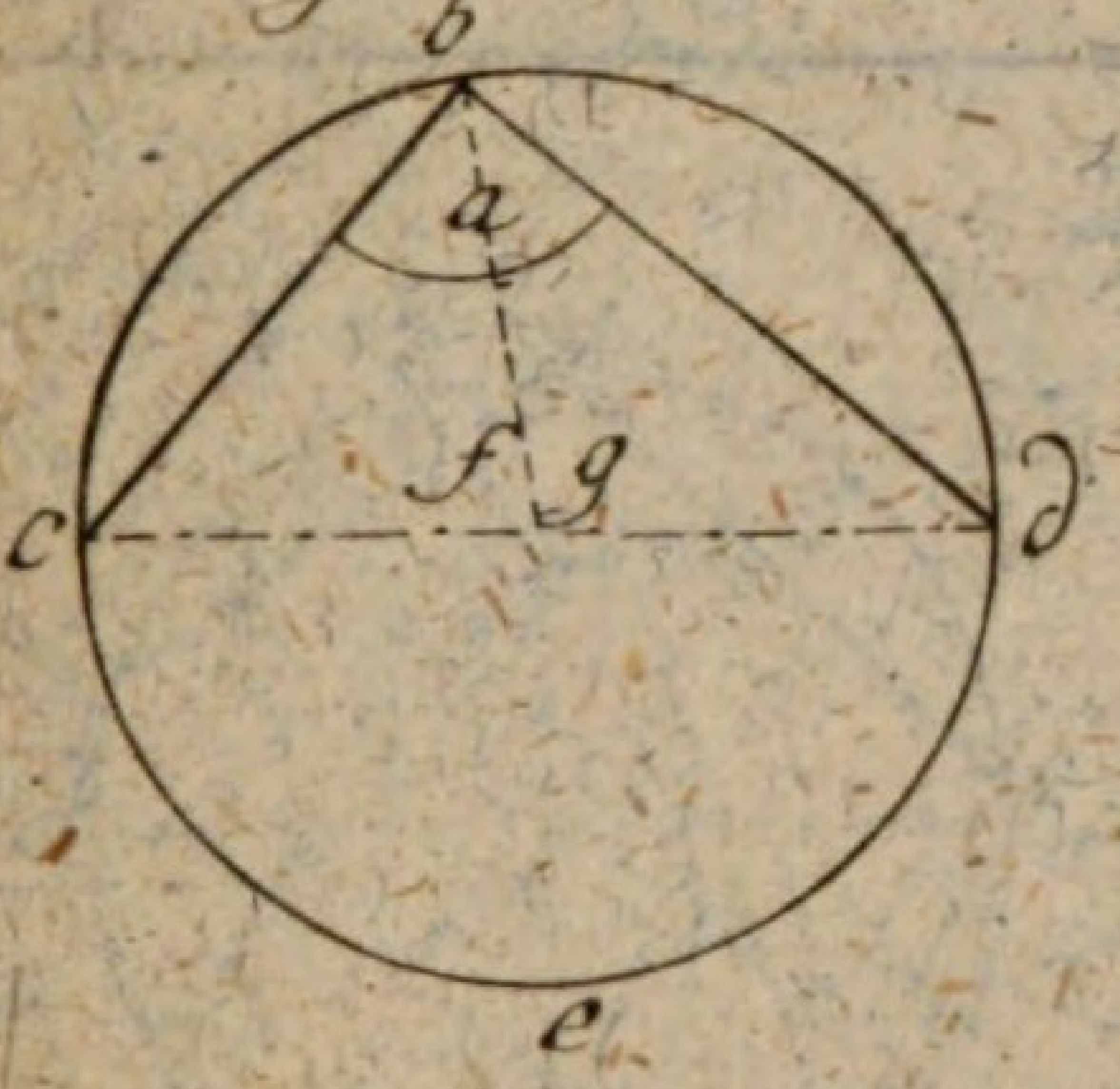


Fig. 88.

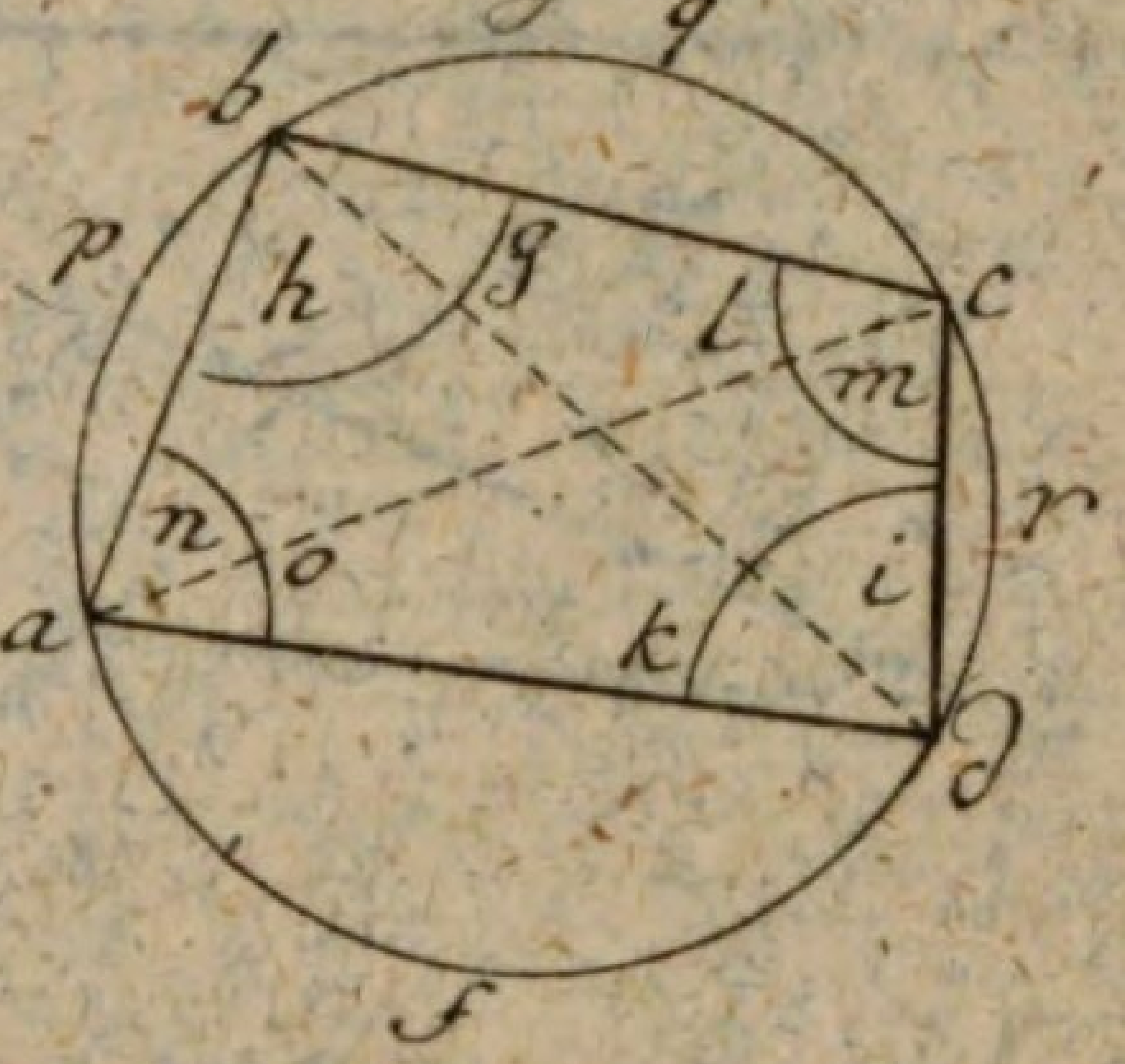


Fig. 89.

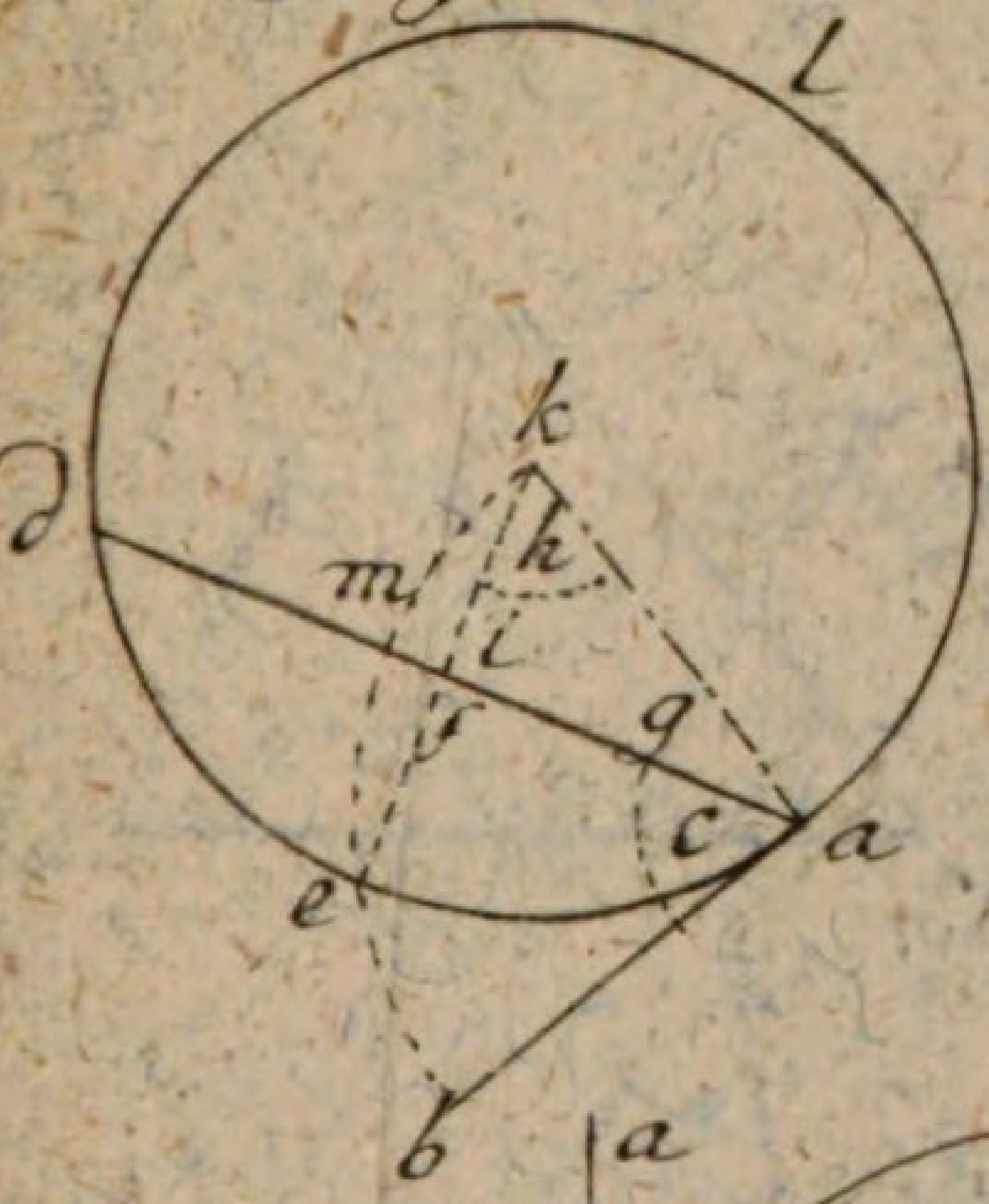


Fig. 90.

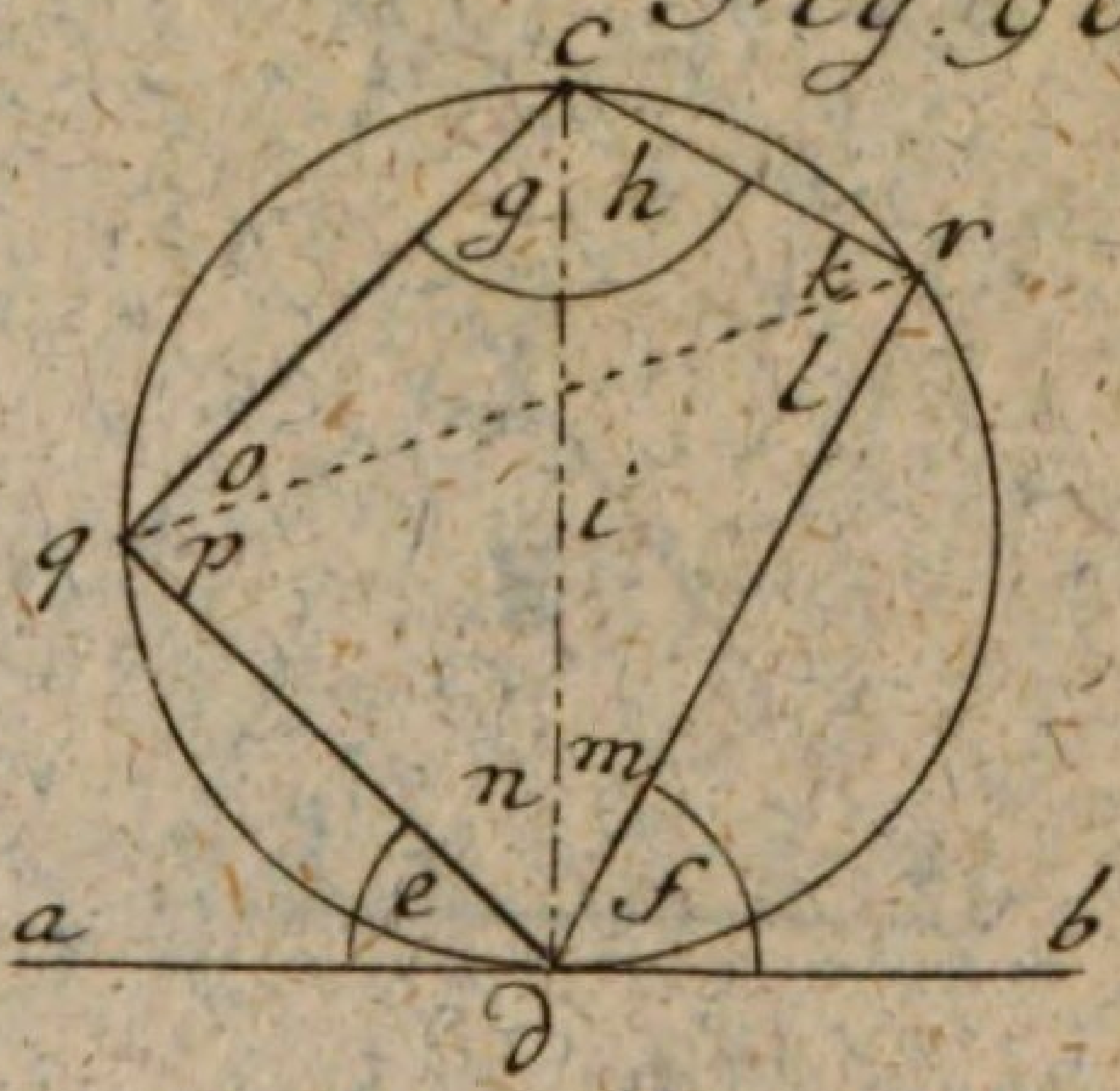
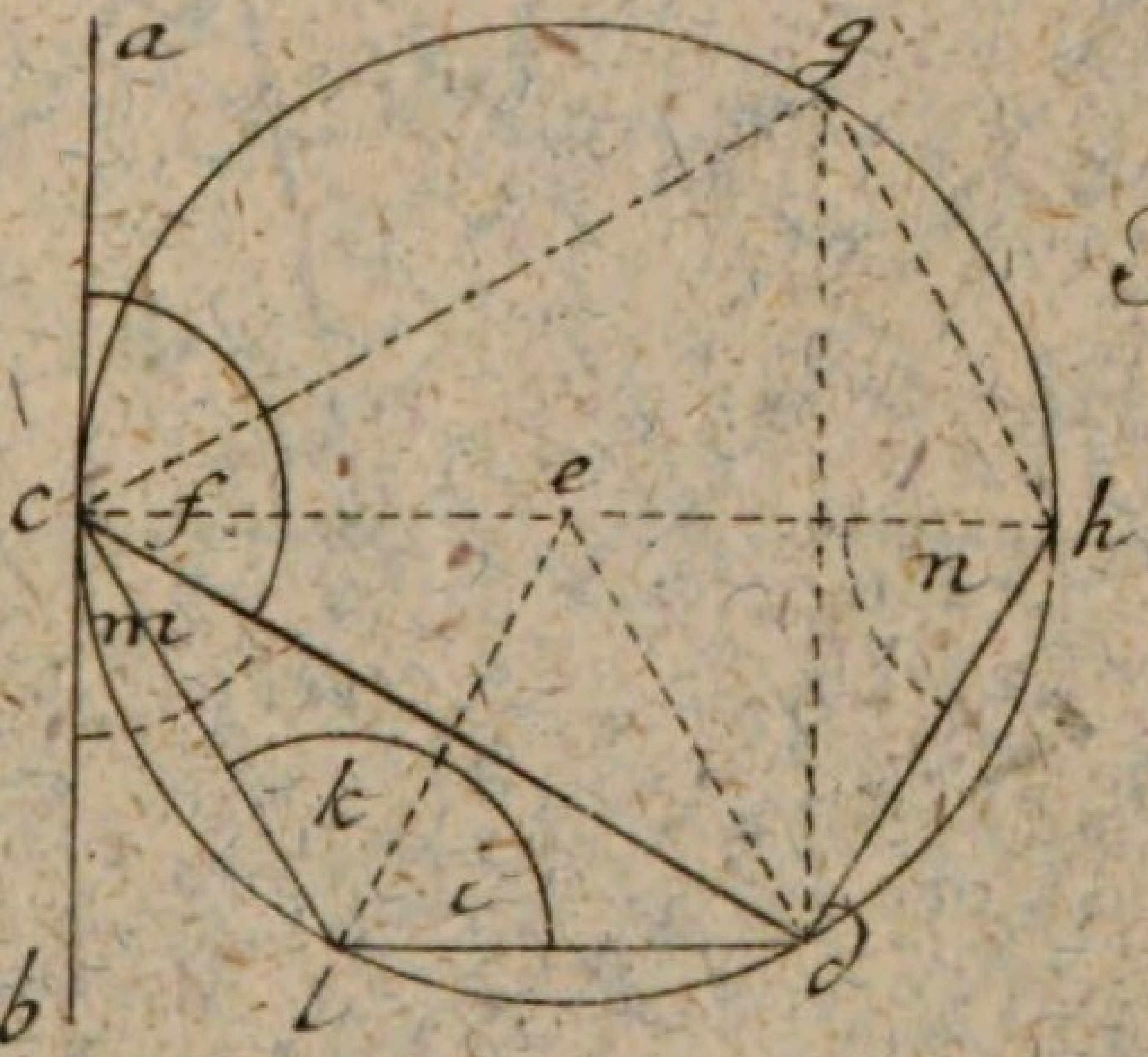


Fig. 91.



Tab. XVIII

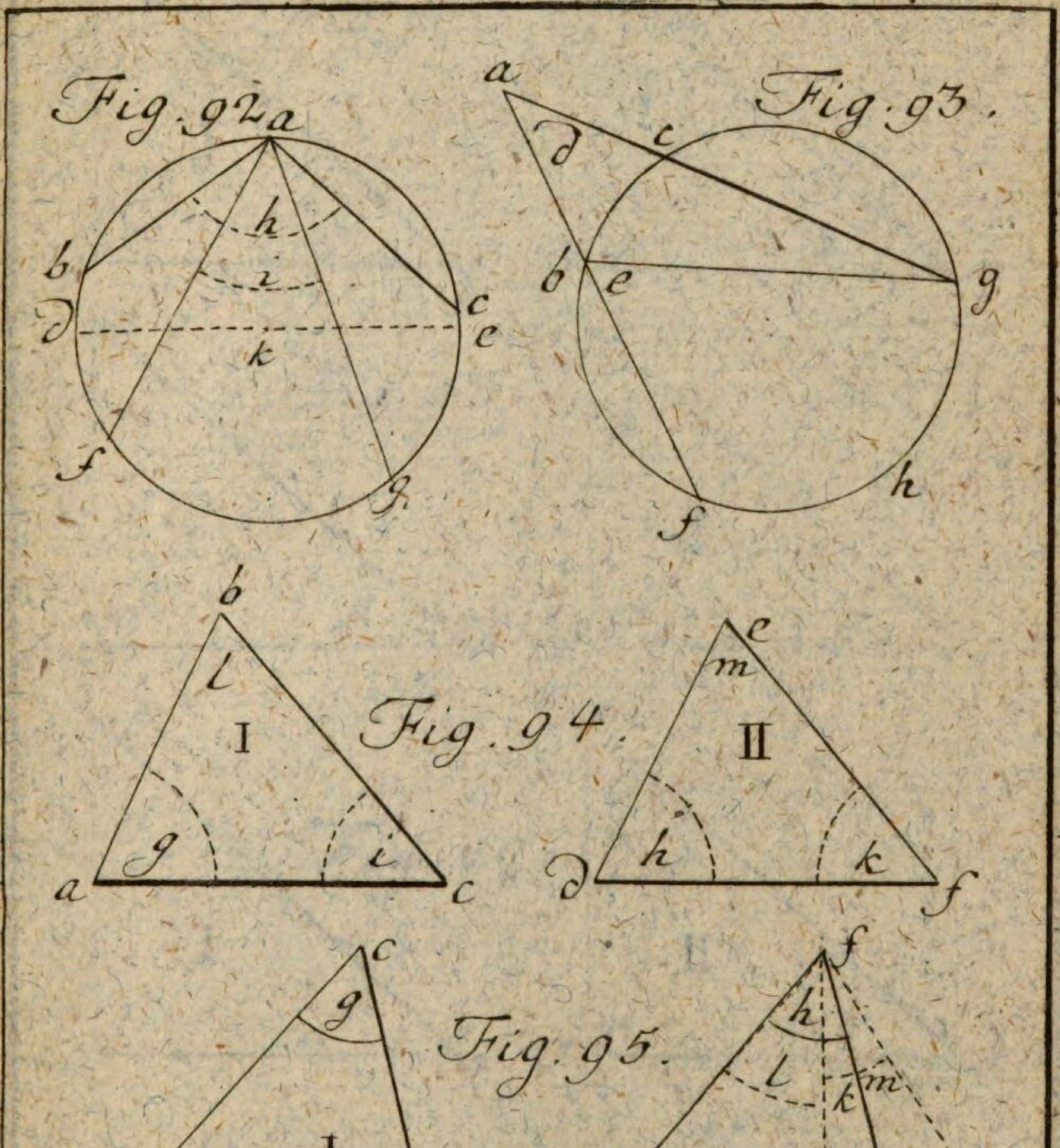
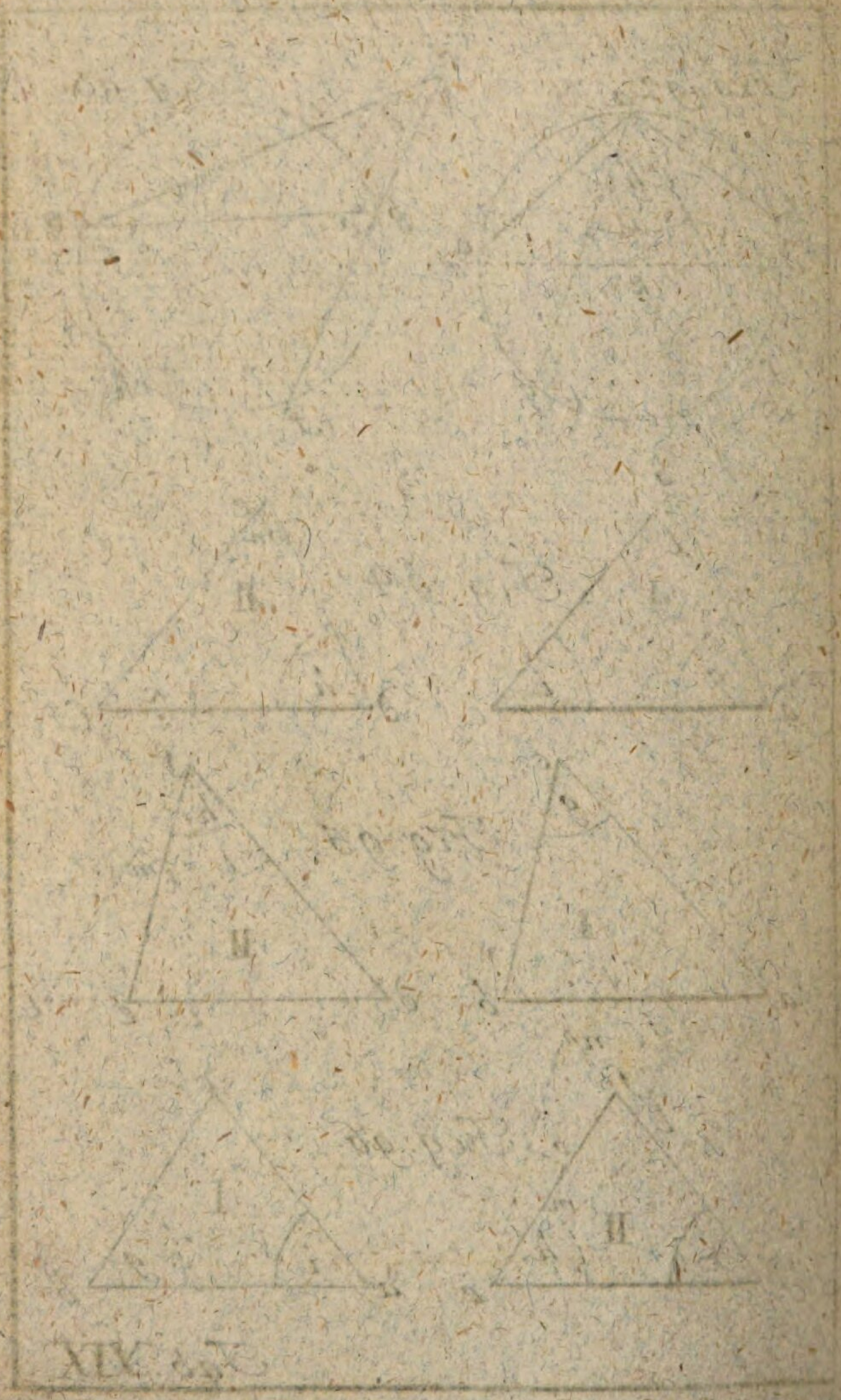


Fig. 92
a b c d e f g h i k
Fig. 93
a b c d e f g h
Fig. 94
I II
a b c d e f g h i k l m
Fig. 95
I II
a b c d e f g h i k l m
Fig. 96
I II
a b c d e f g h i k l m n o
Tab. XIX.



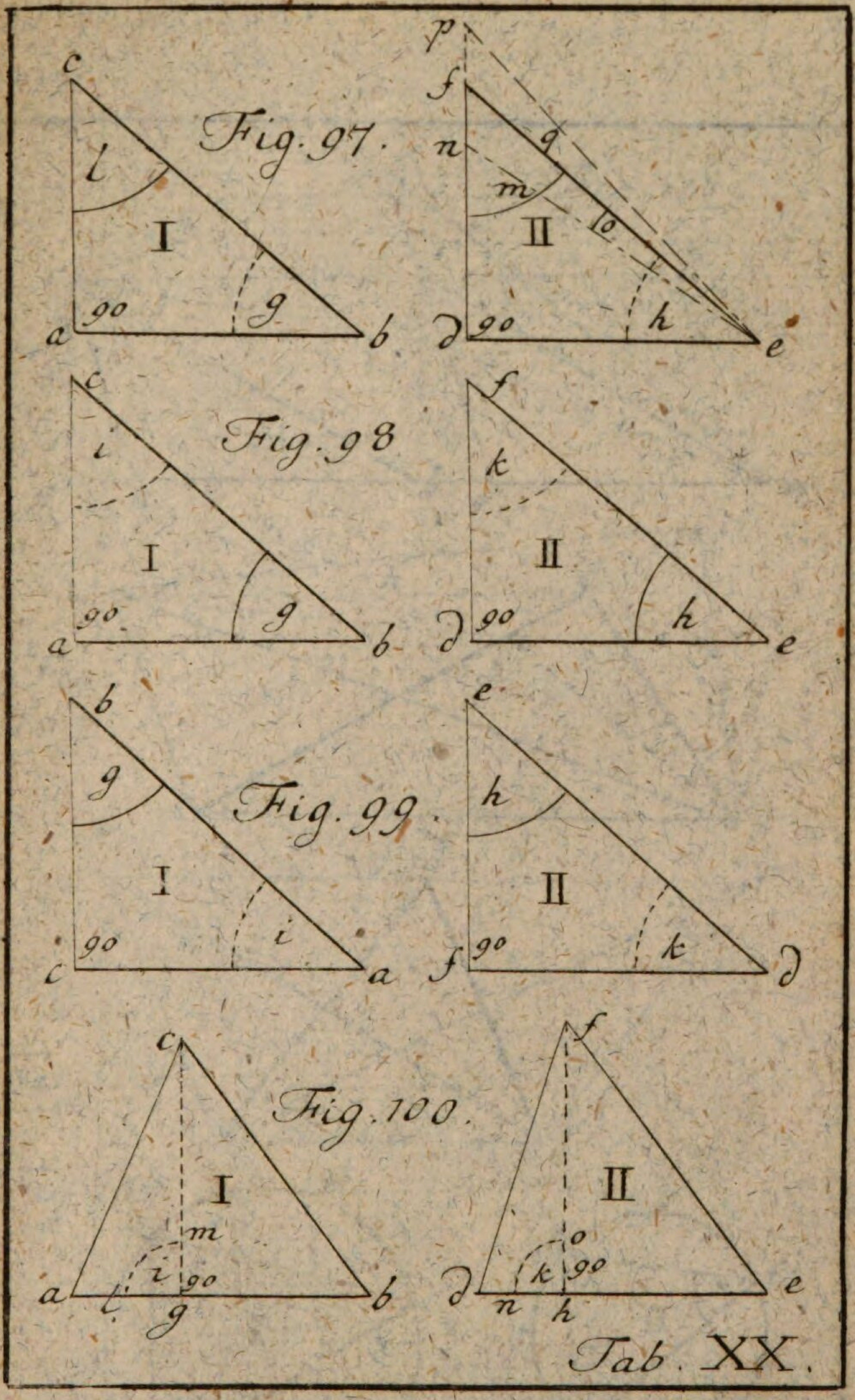


Fig. 97.
c
l
I
g
90
a
b
p
f
n
q
m
II
o
h
90
d
e
Fig. 98
c
i
I
g
90
a
b
f
k
II
h
90
d
e
Fig. 99.
b
g
I
i
90
c
a
e
h
II
k
90
f
d
Fig. 100.
c
I
m
i
90
a
l
g
b
f
II
o
k
90
d
n
h
e
Tab. XX.

Fig. 101.

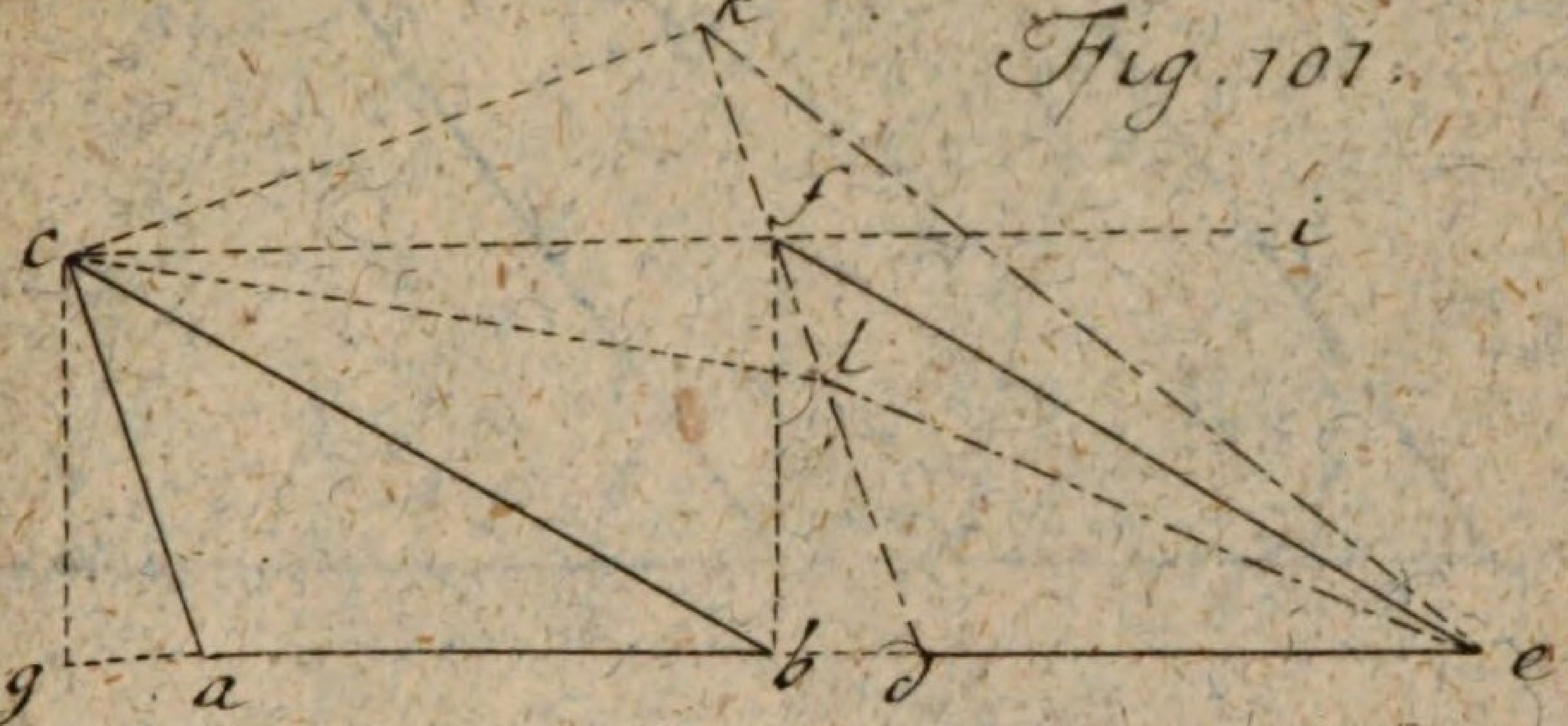


Fig. 102.

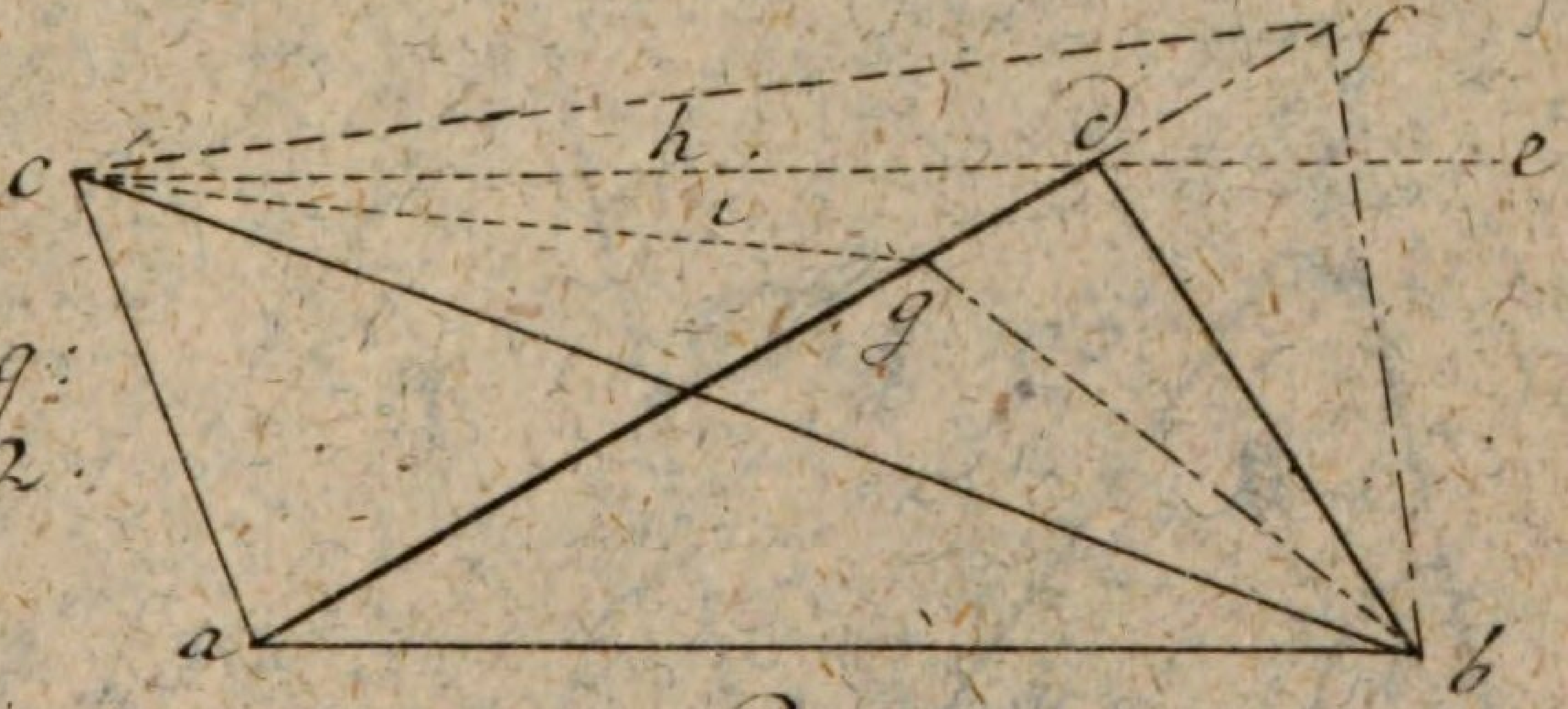
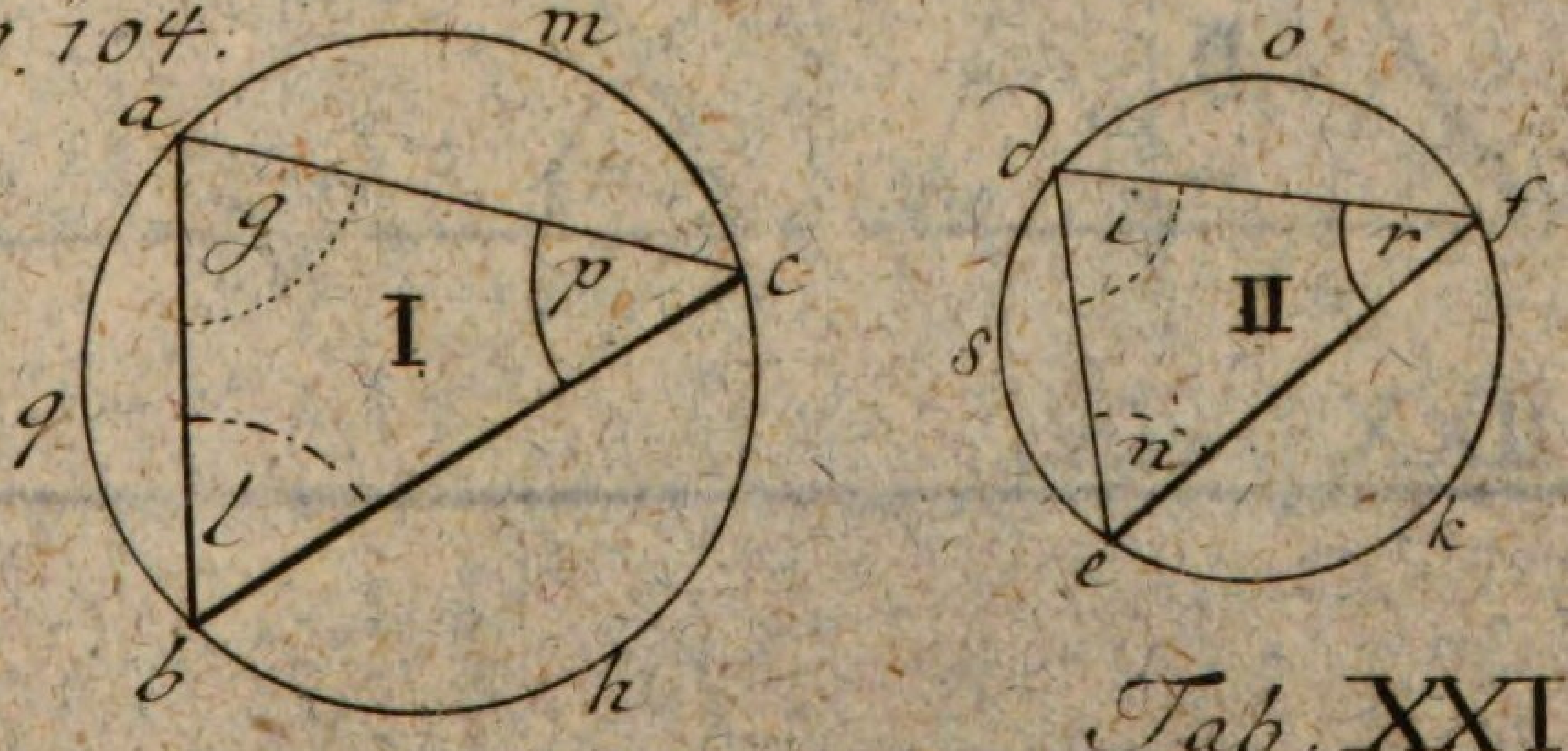
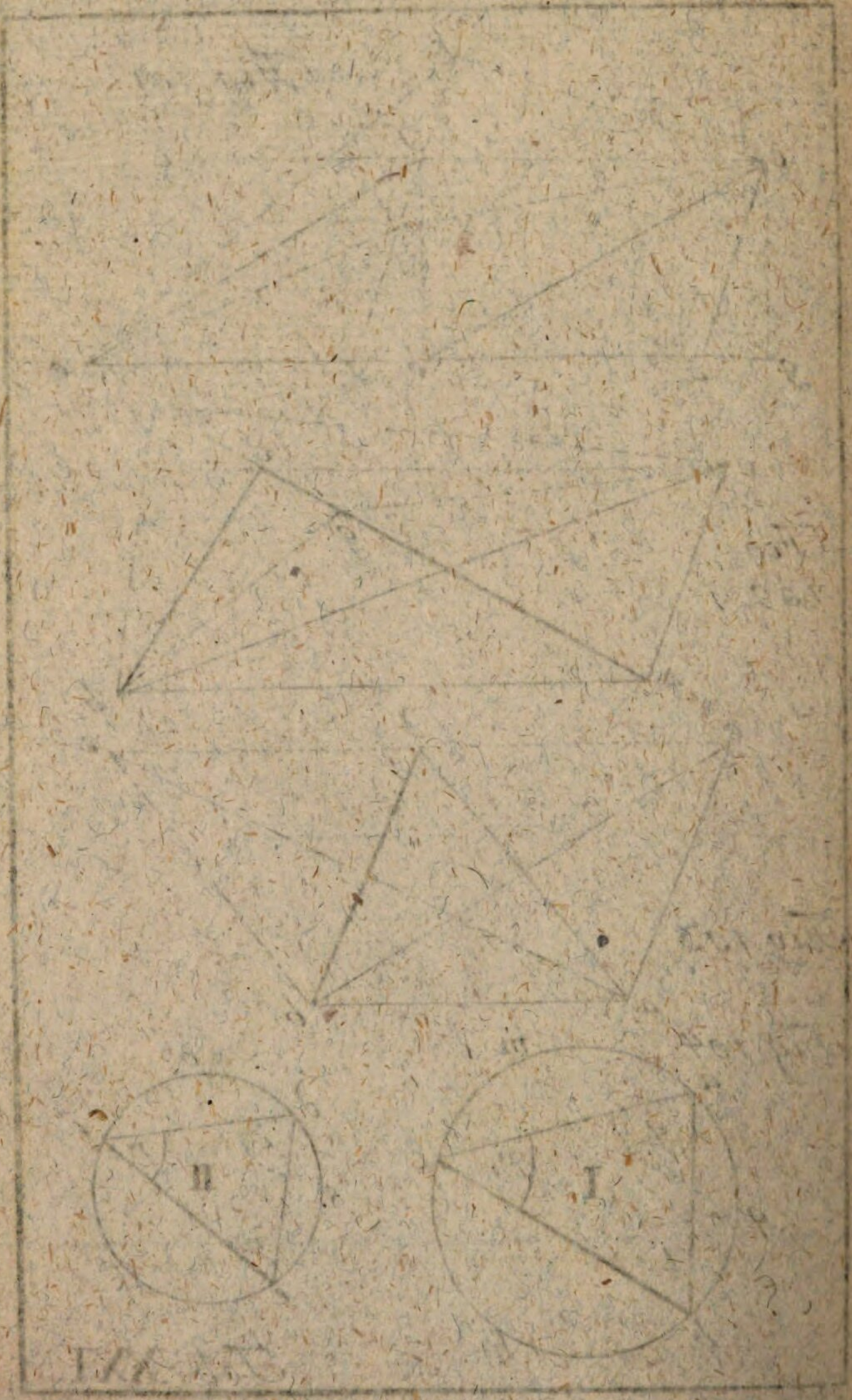


Fig. 103.

Fig. 104.



Tab. XXI.


II
I

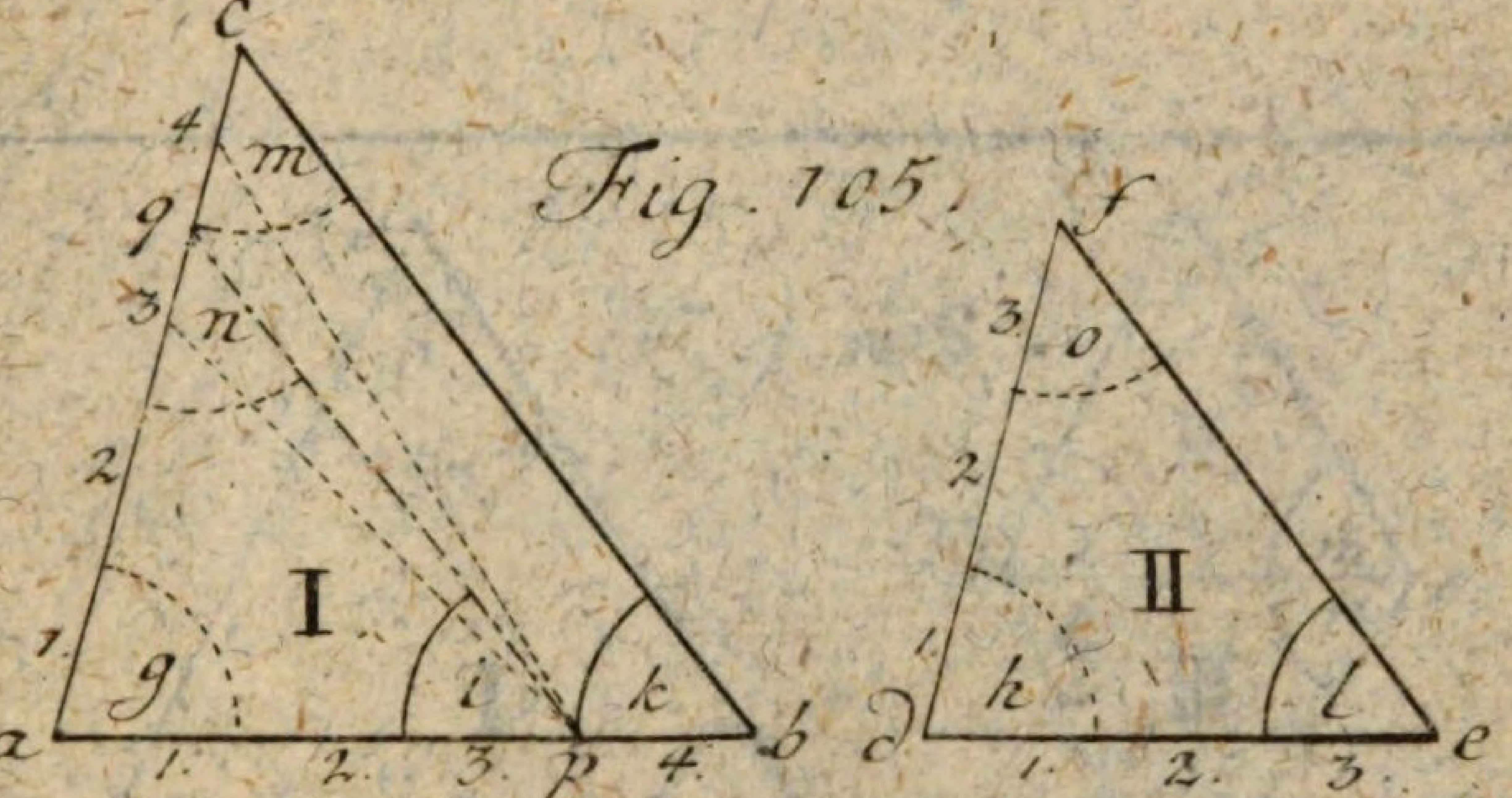


Fig. 105.

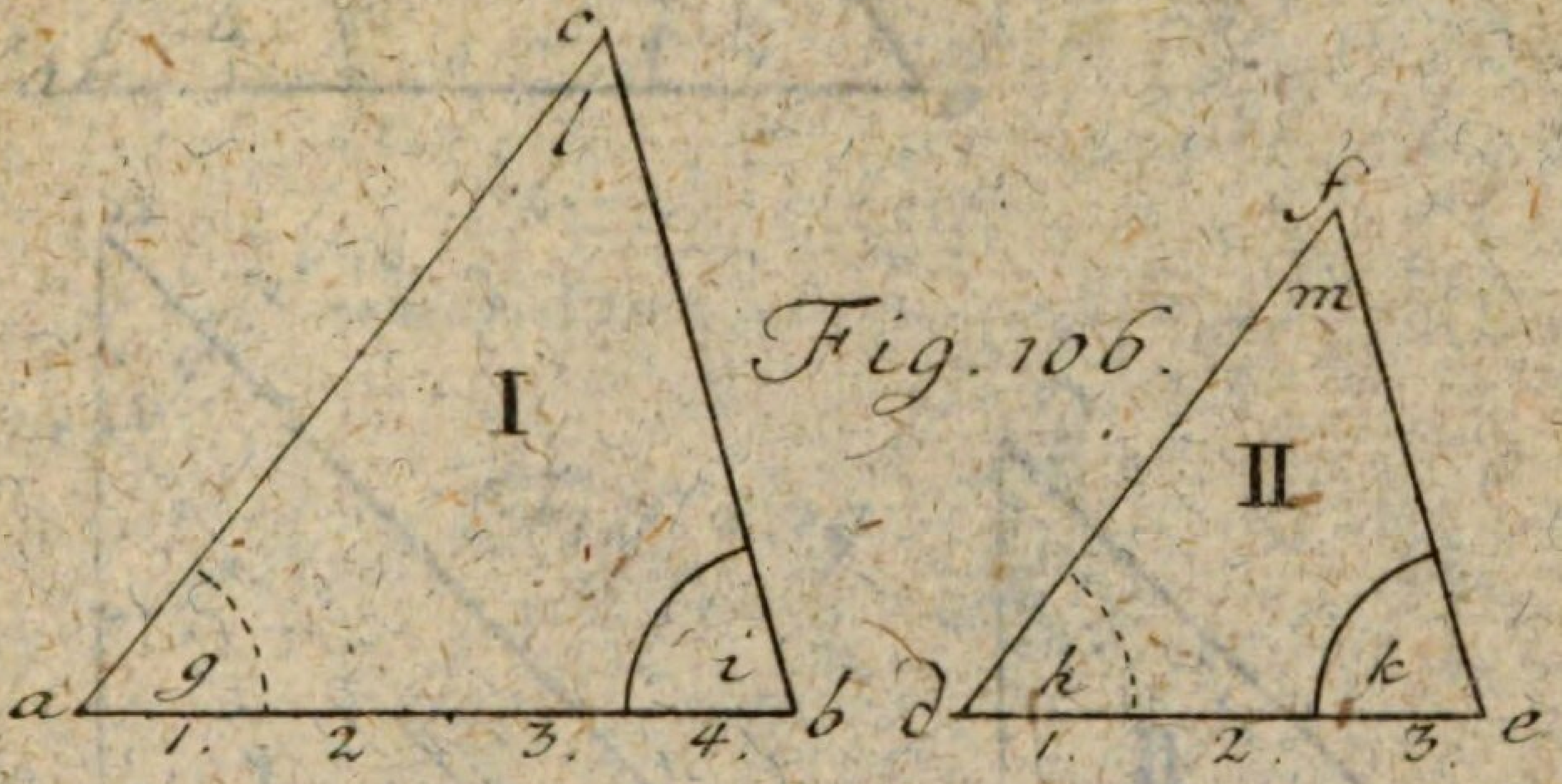


Fig. 106.

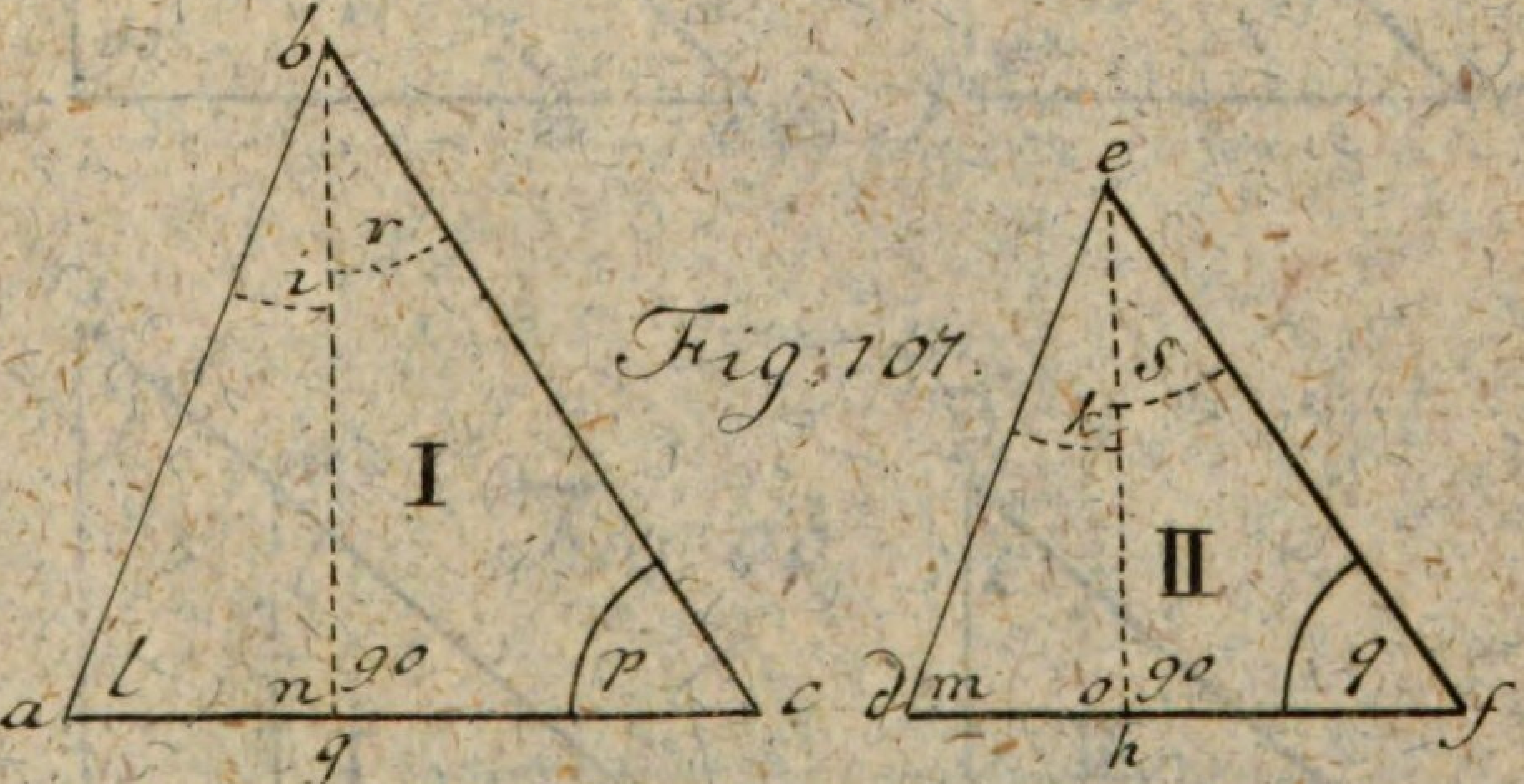


Fig. 107.

Tab. XXII.

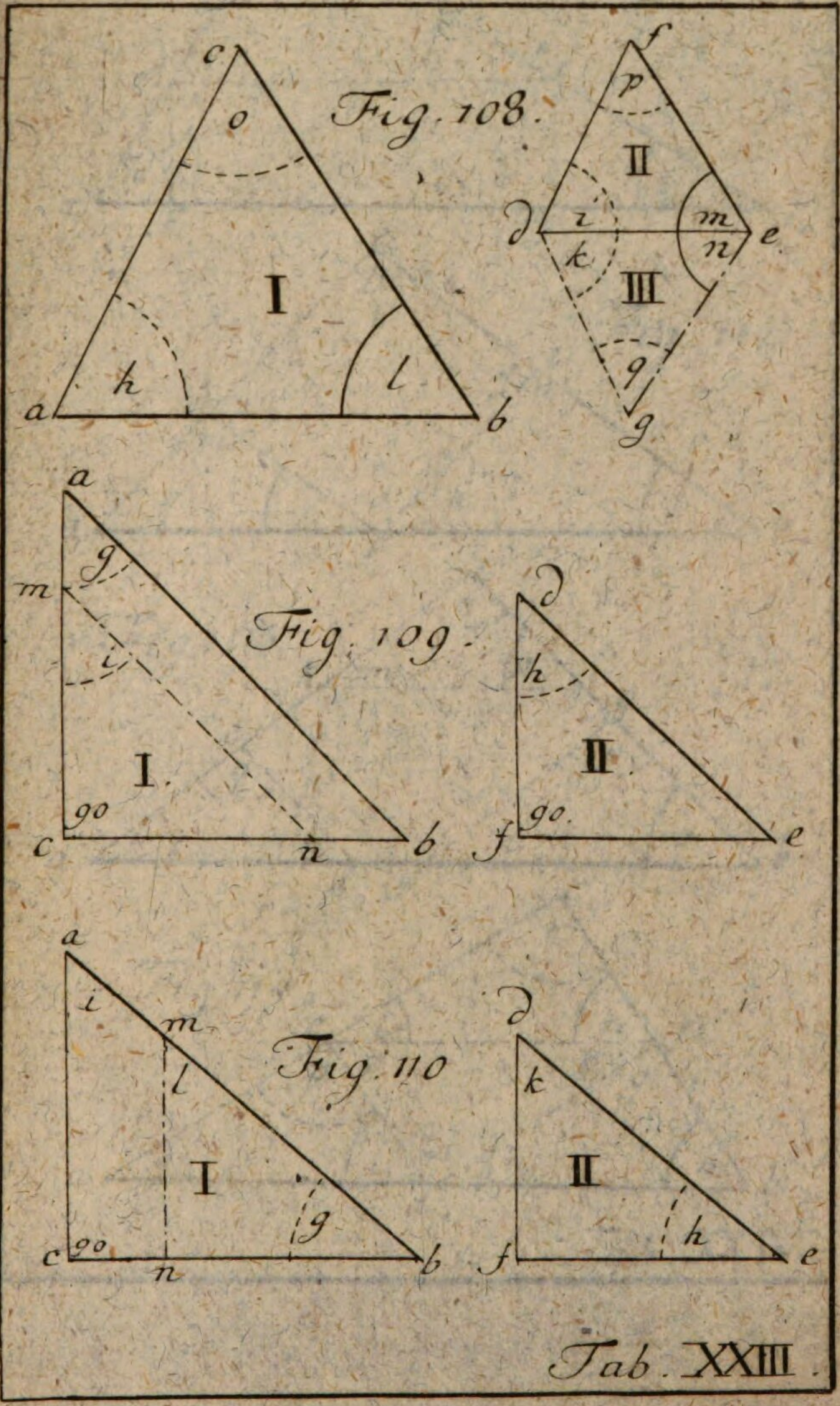


Fig. 108.
c
o
I
k
l
a
b
f
p
II
d
i
m
e
k
n
III
q
g
Fig. 109.
a
g
m
i
I.
90
c
n
b
d
h
II.
90.
f
e
Fig. 110
a
i
m
l
I
g
c
90
n
b
d
k
II
h
f
e
Tab. XXIII.

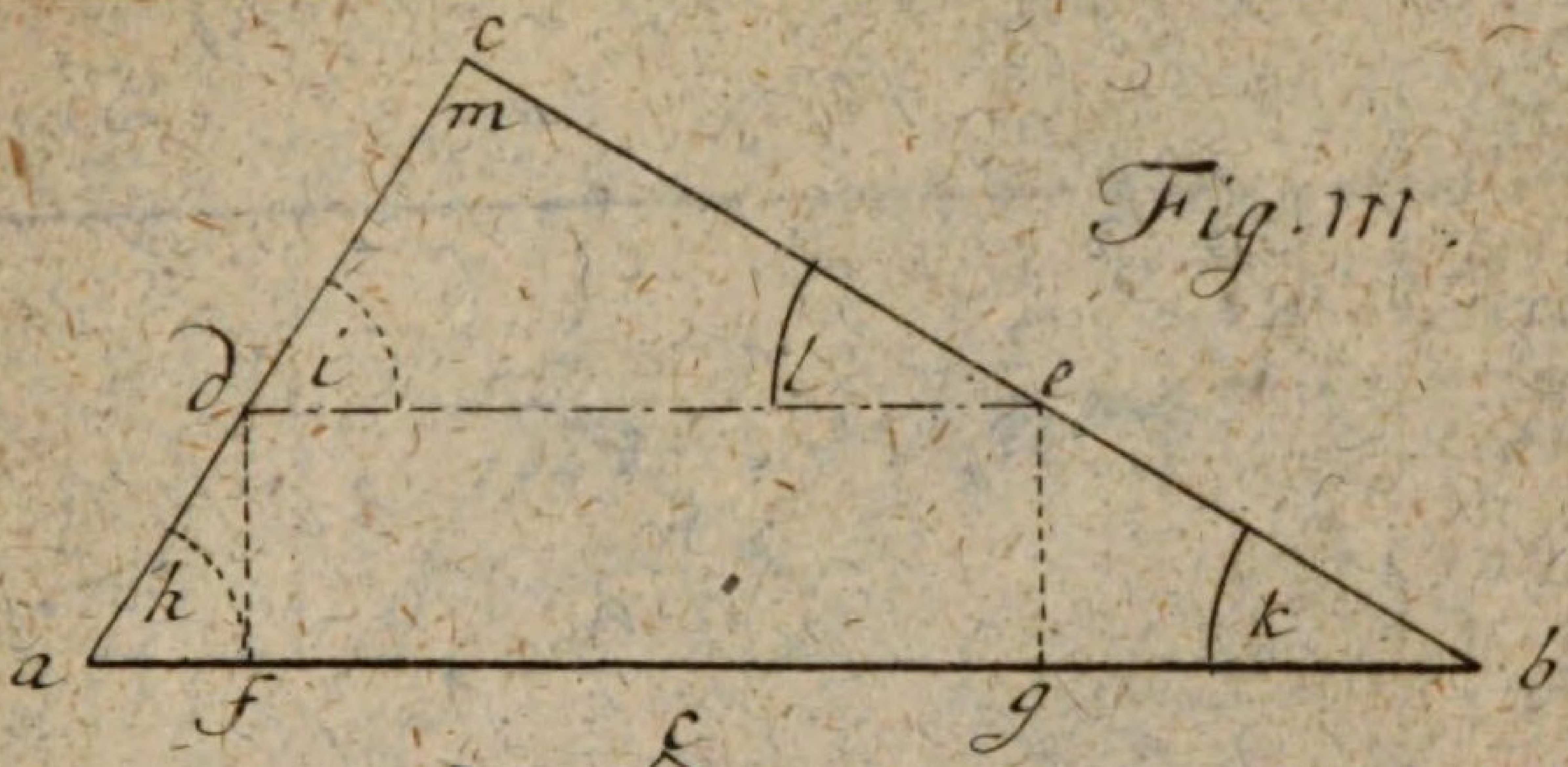


Fig. 111.

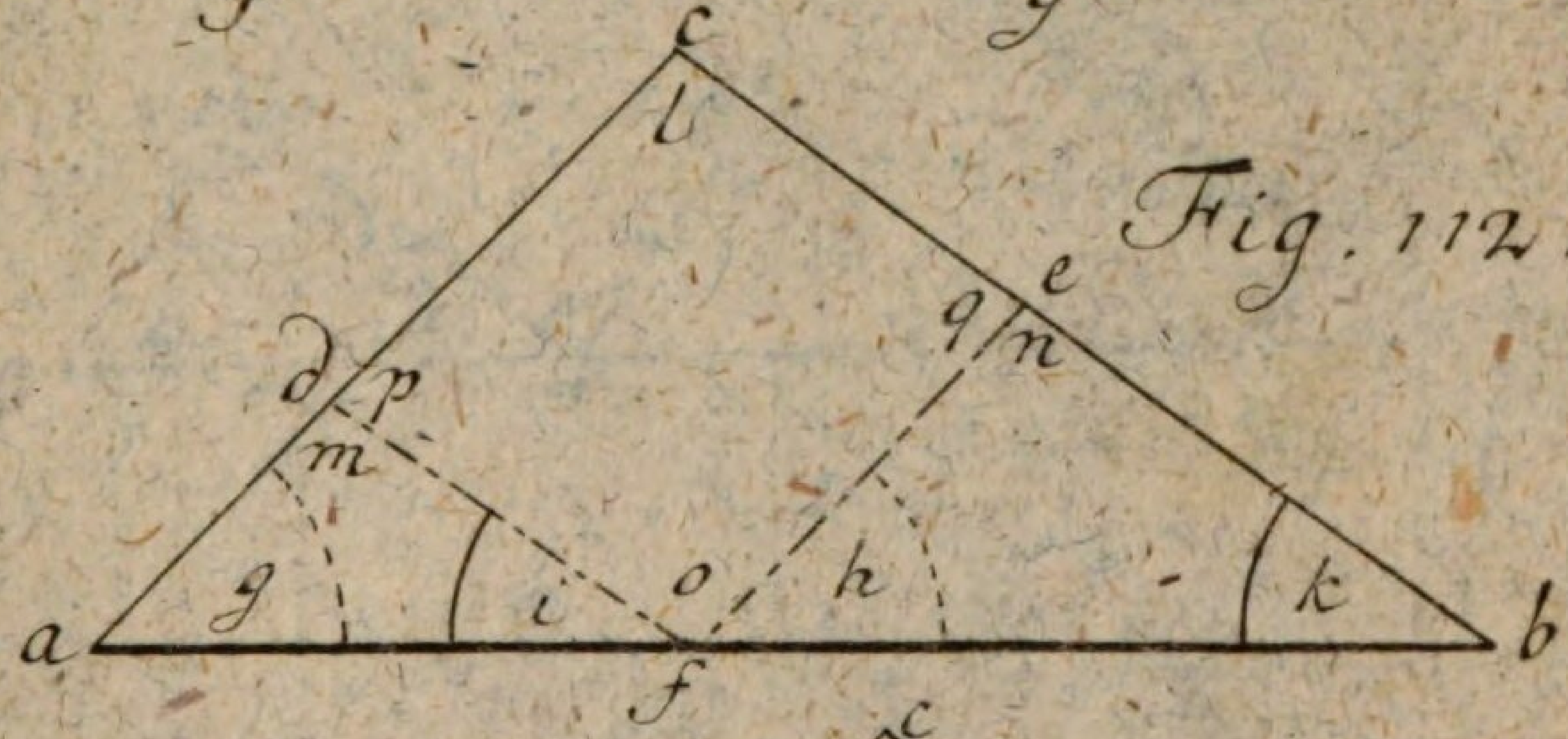


Fig. 112.

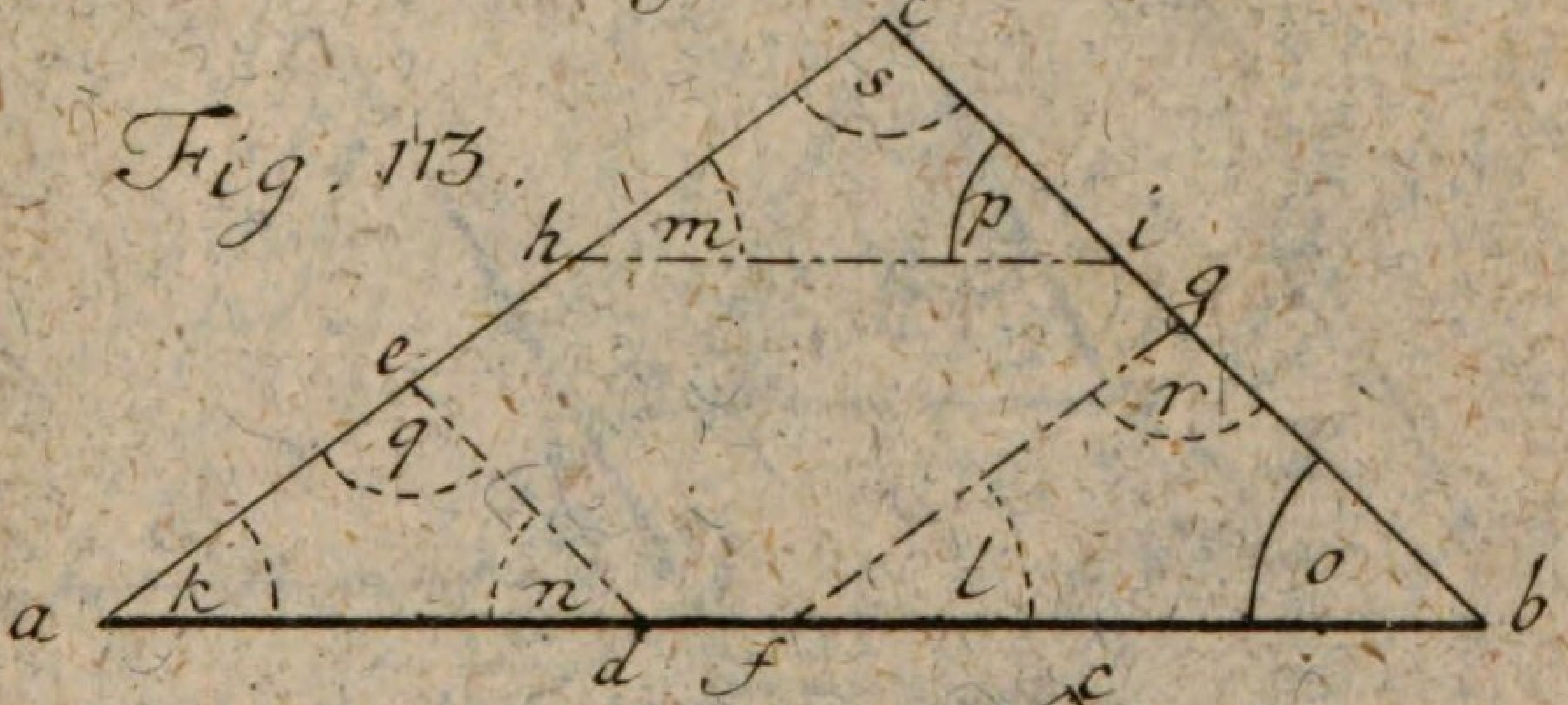


Fig. 113.

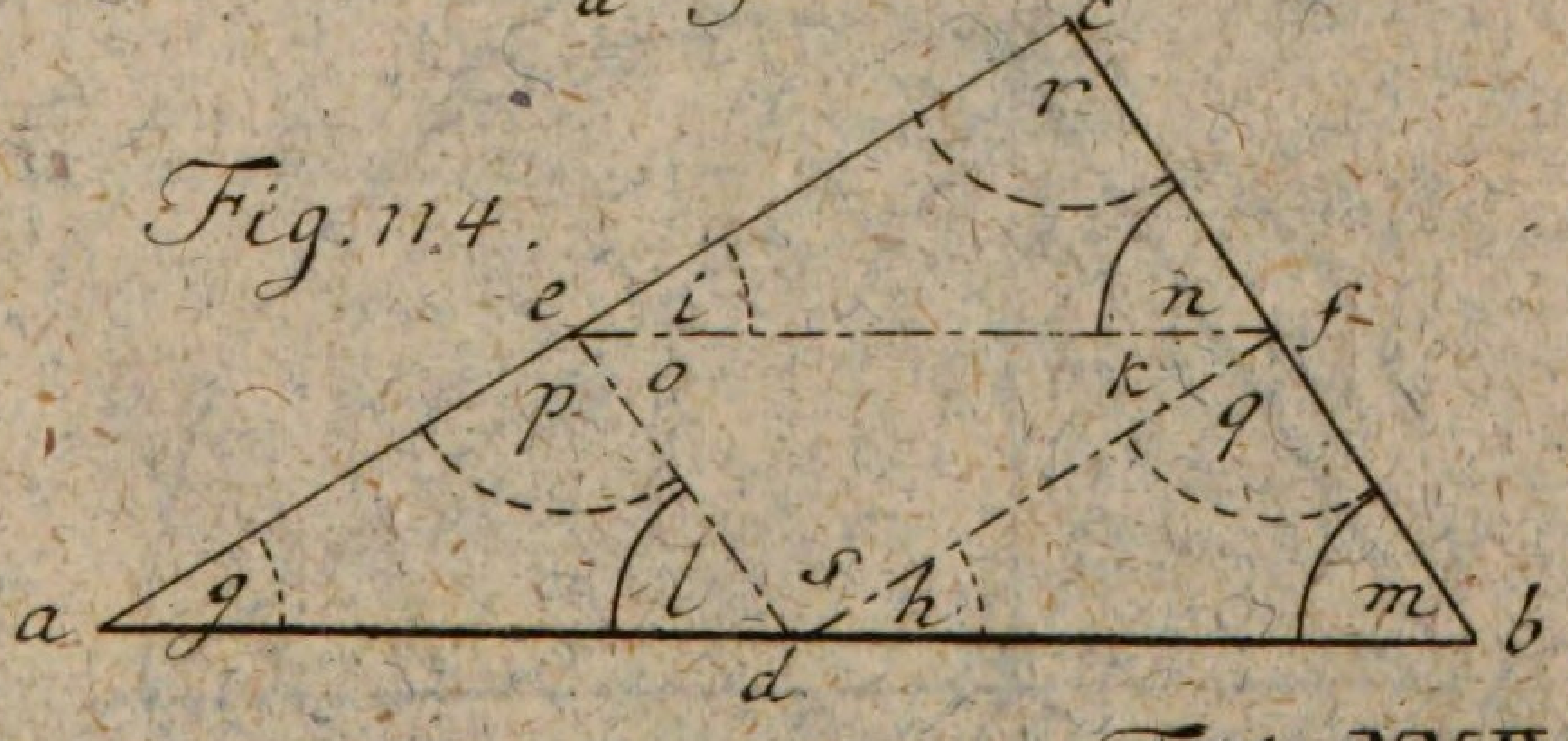


Fig. 114.

Tab. XXIV.

Fig. 115

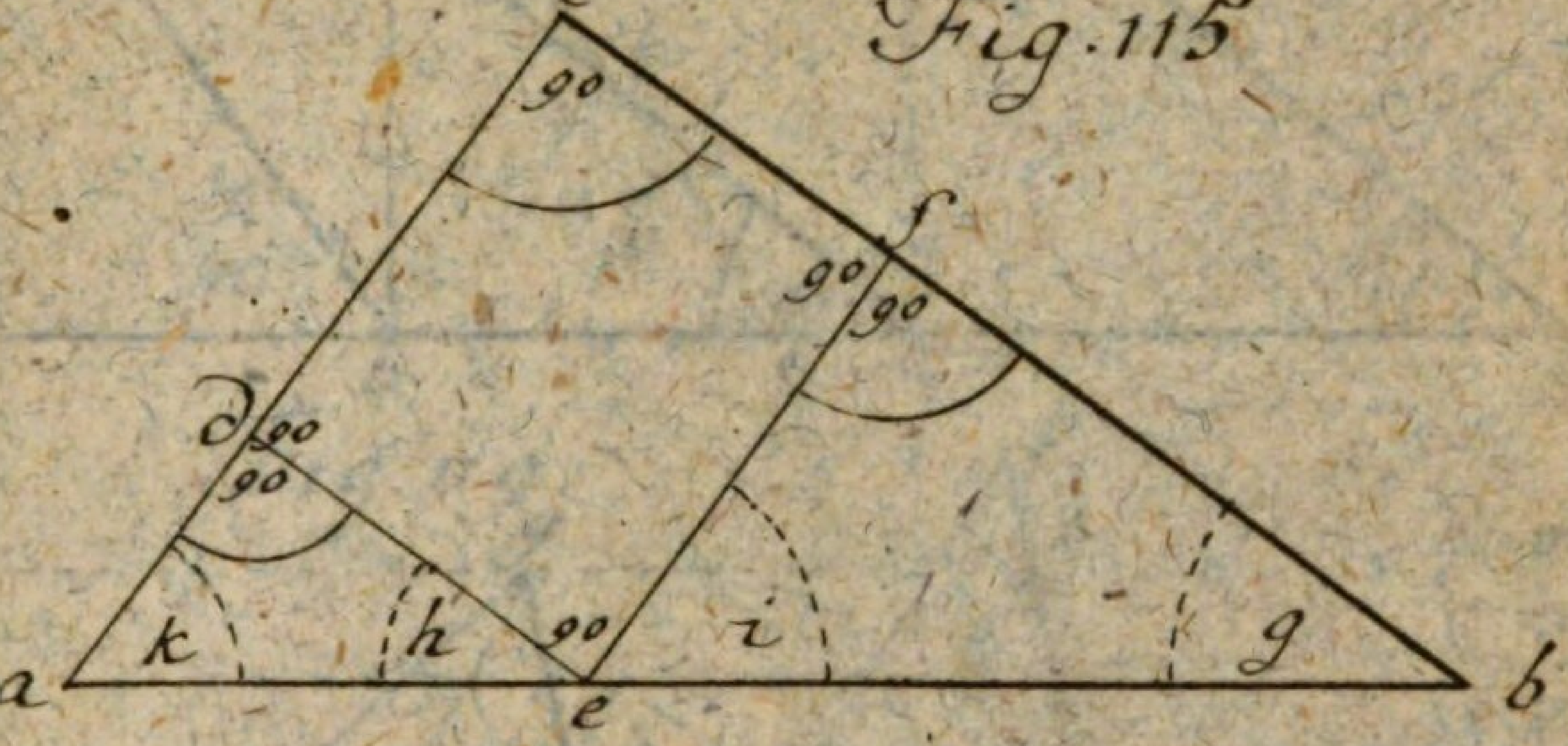


Fig. 116.

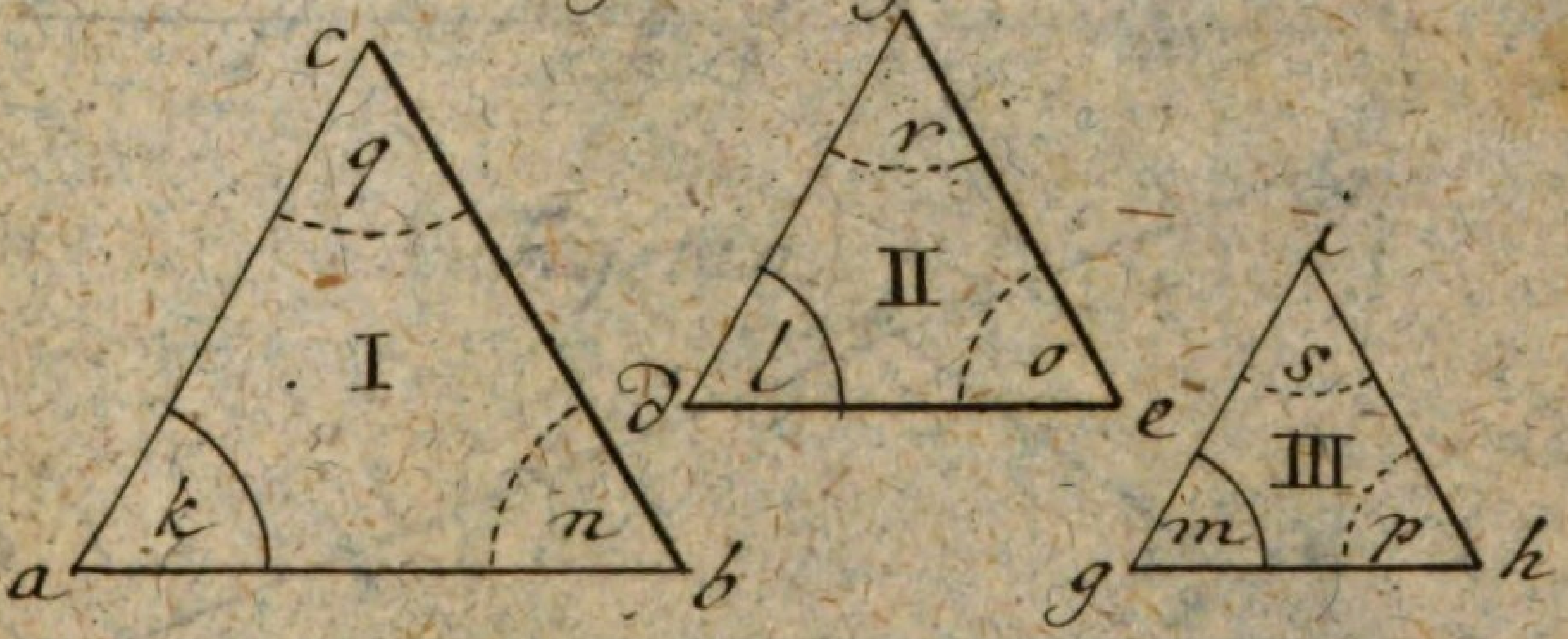
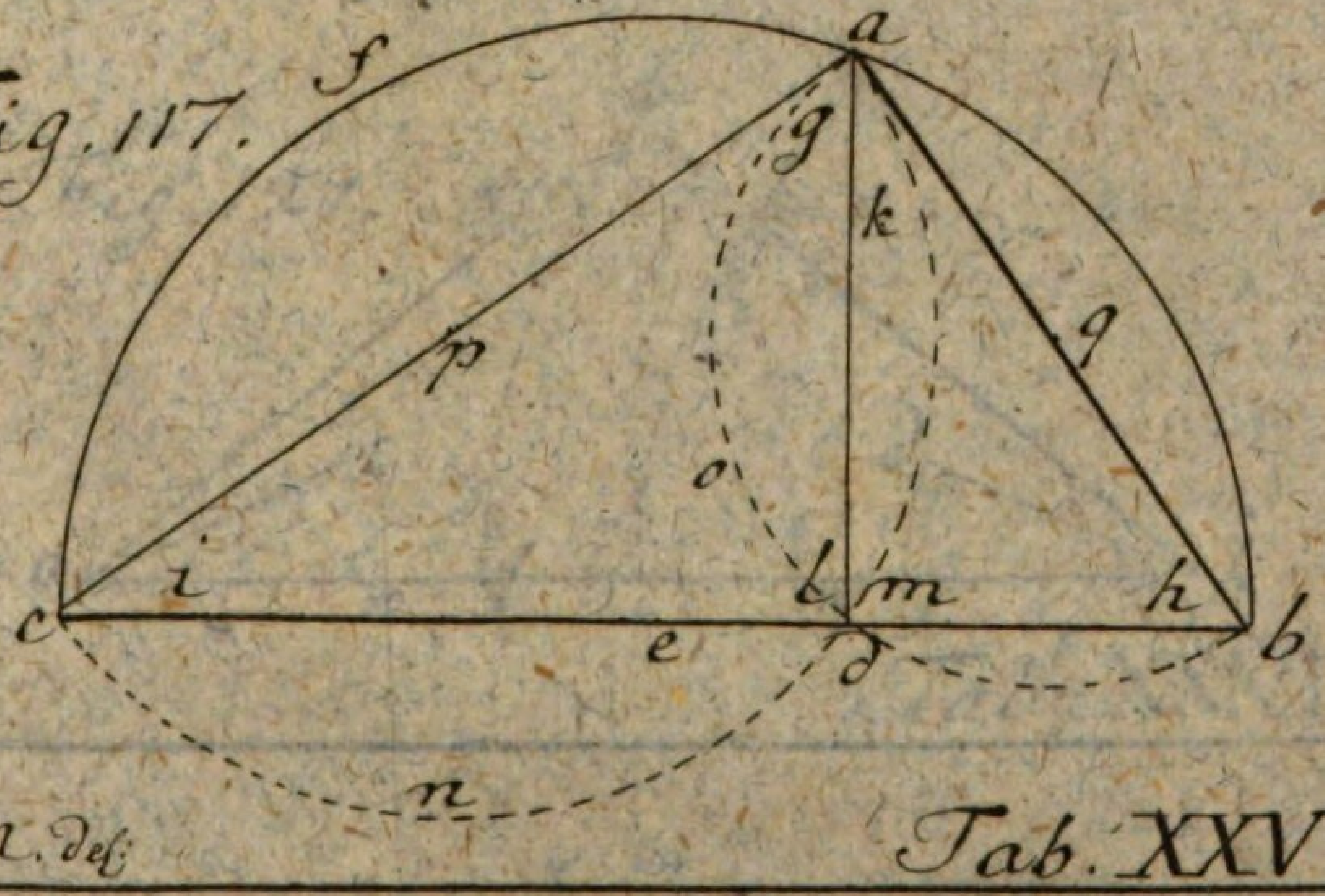


Fig. 117.



de M. del.

Tab. XXV.

Fig. 118.

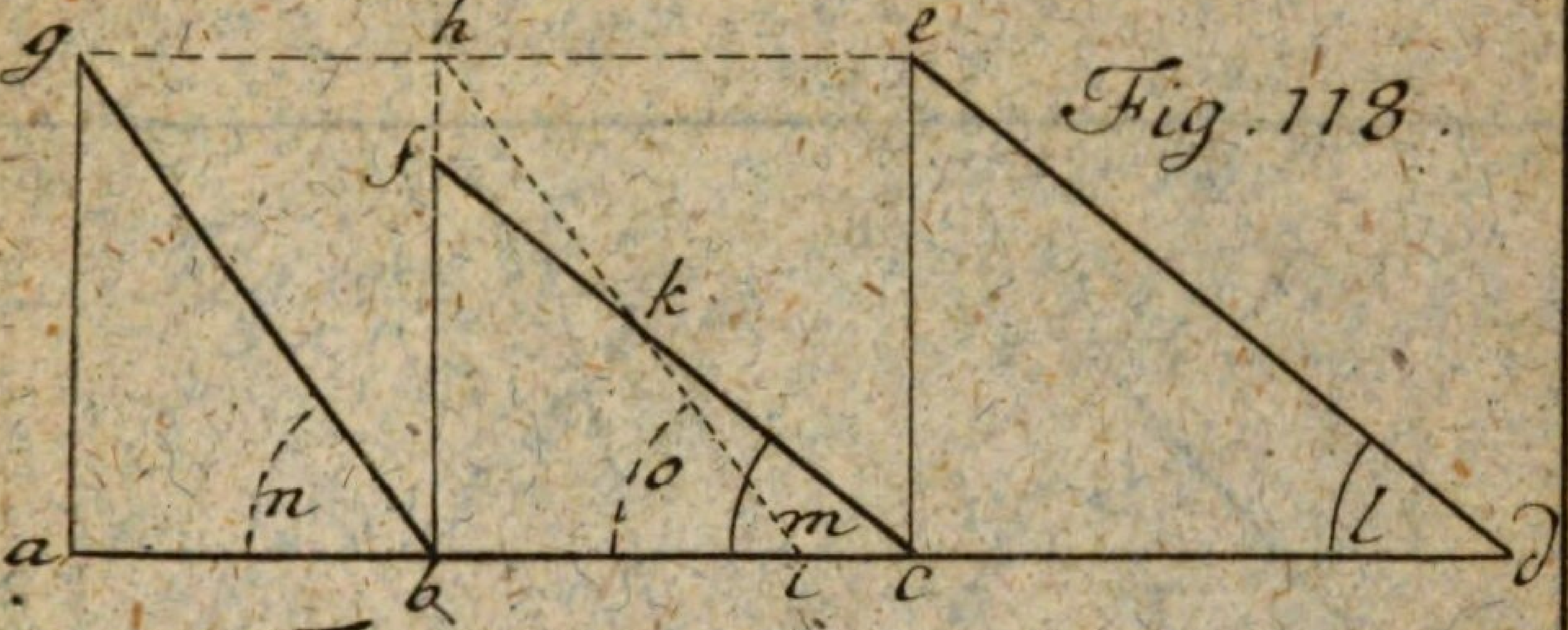


Fig. 119.

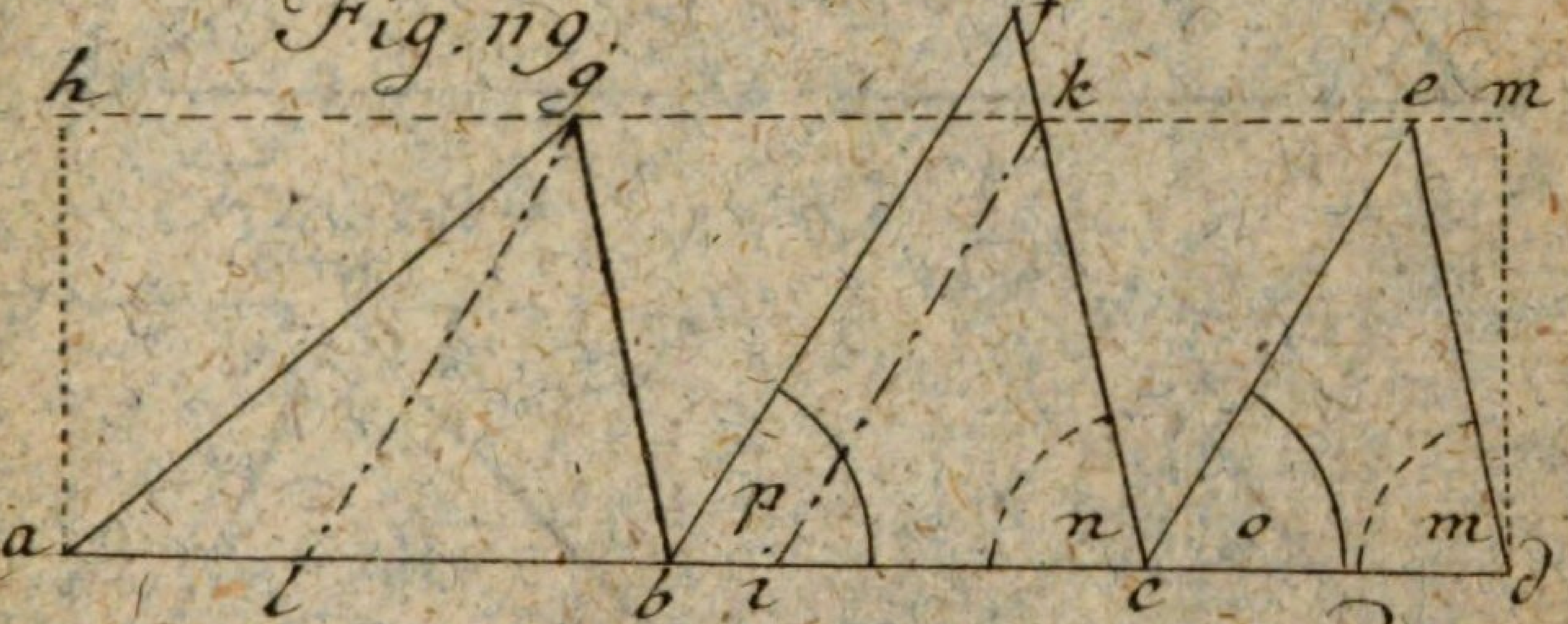


Fig. 120.

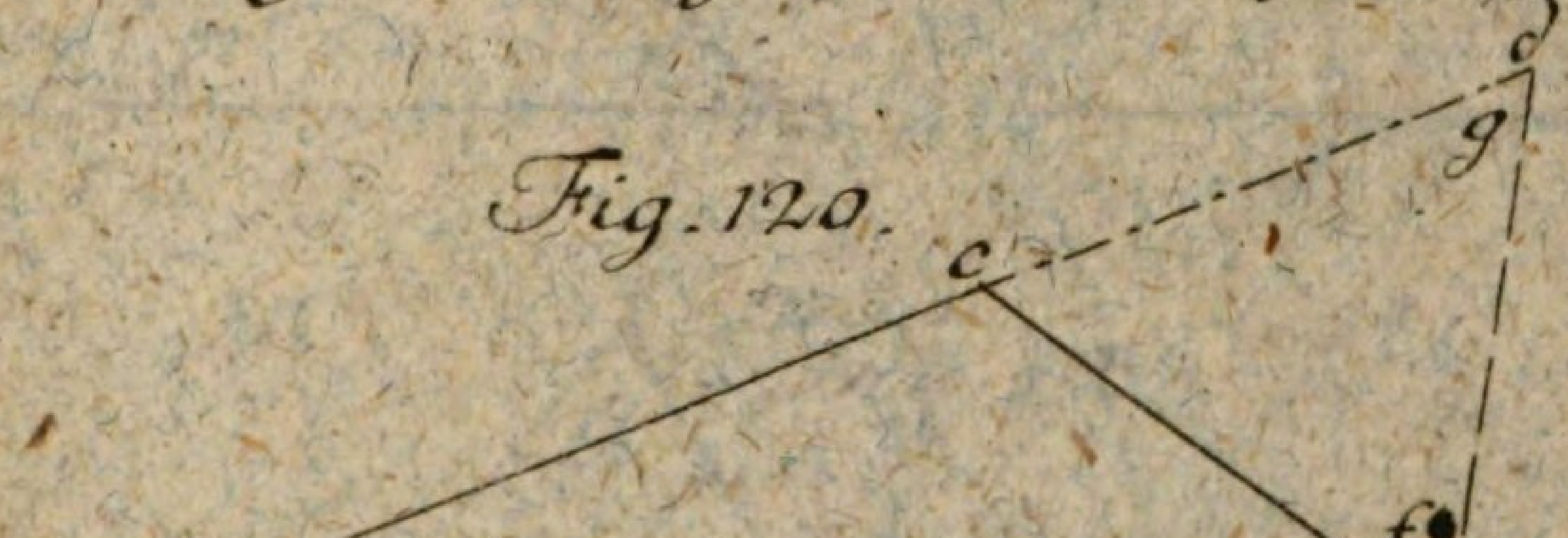
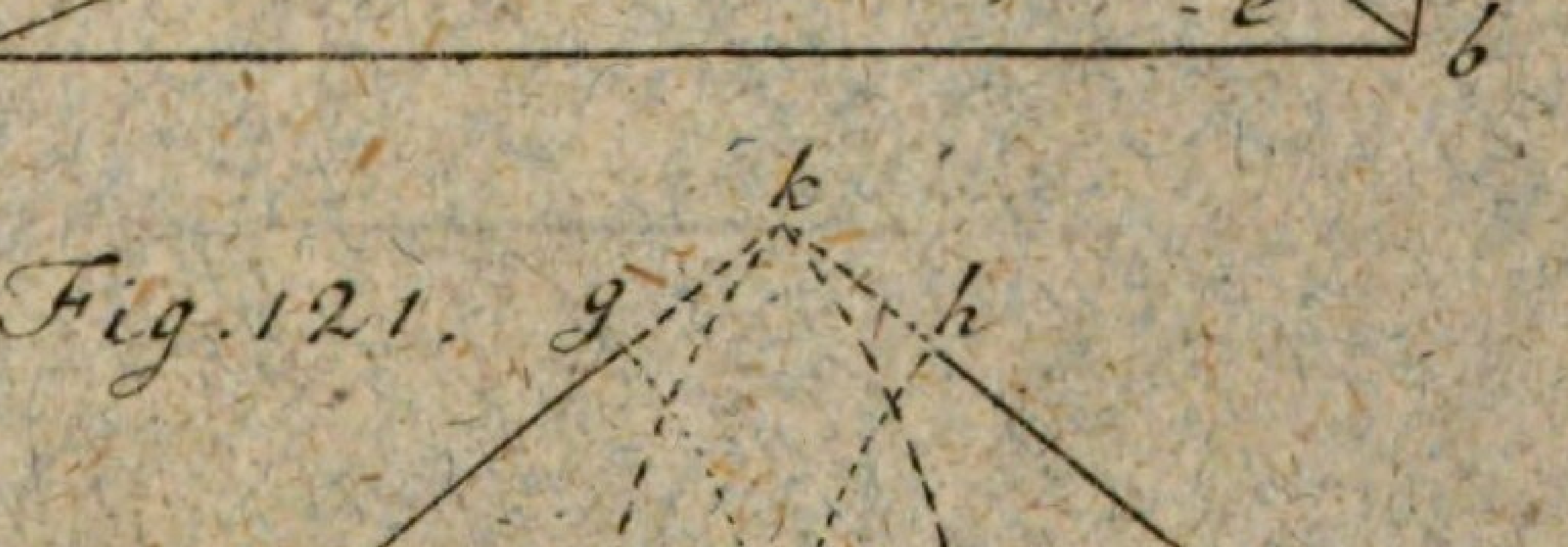


Fig. 121.



Tab. XXVI.

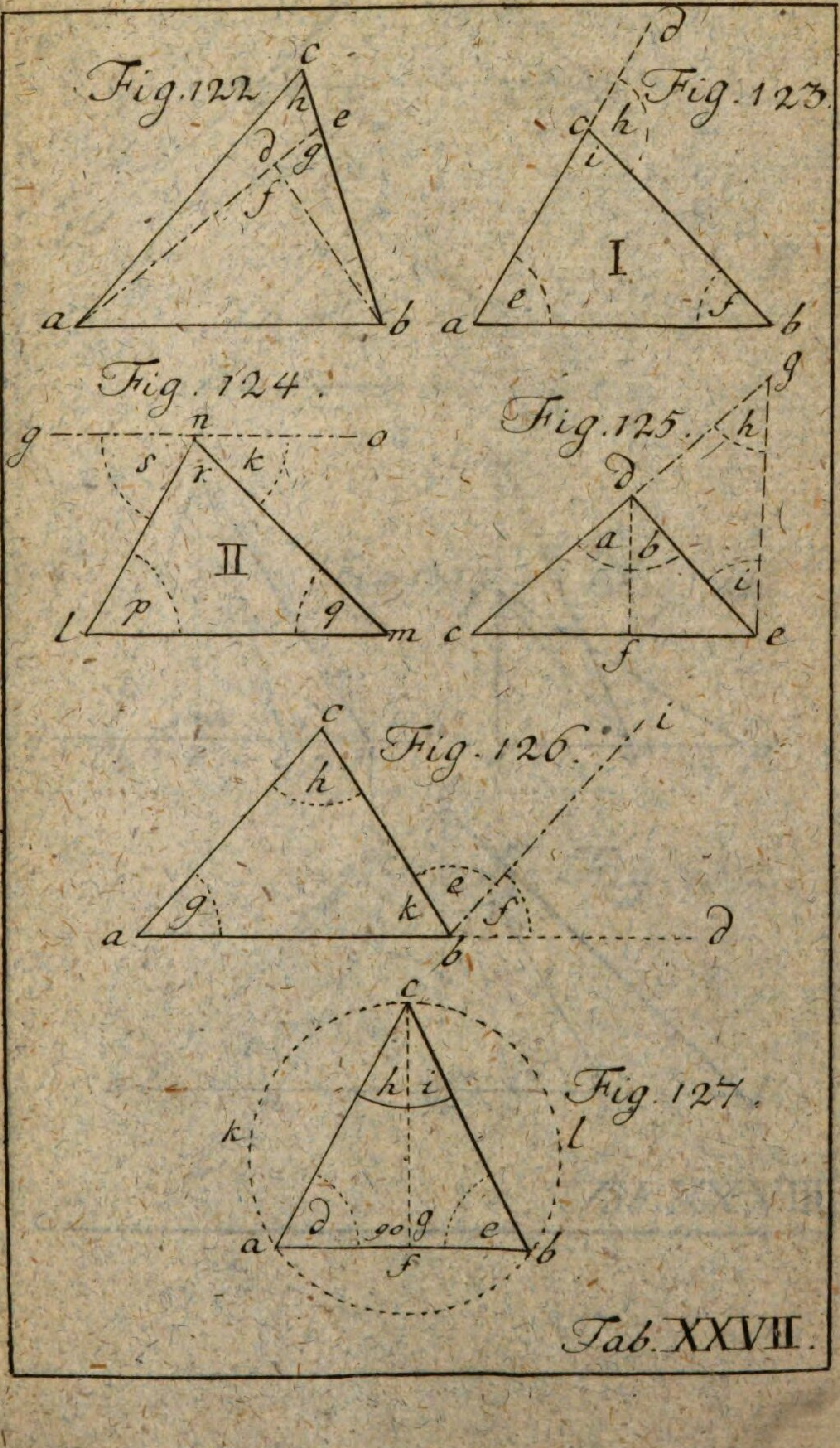


Fig. 122.
Fig. 123.
I
Fig. 124.
II
Fig. 125.
Fig. 126.
Fig. 127.
90
Tab. XXVII.

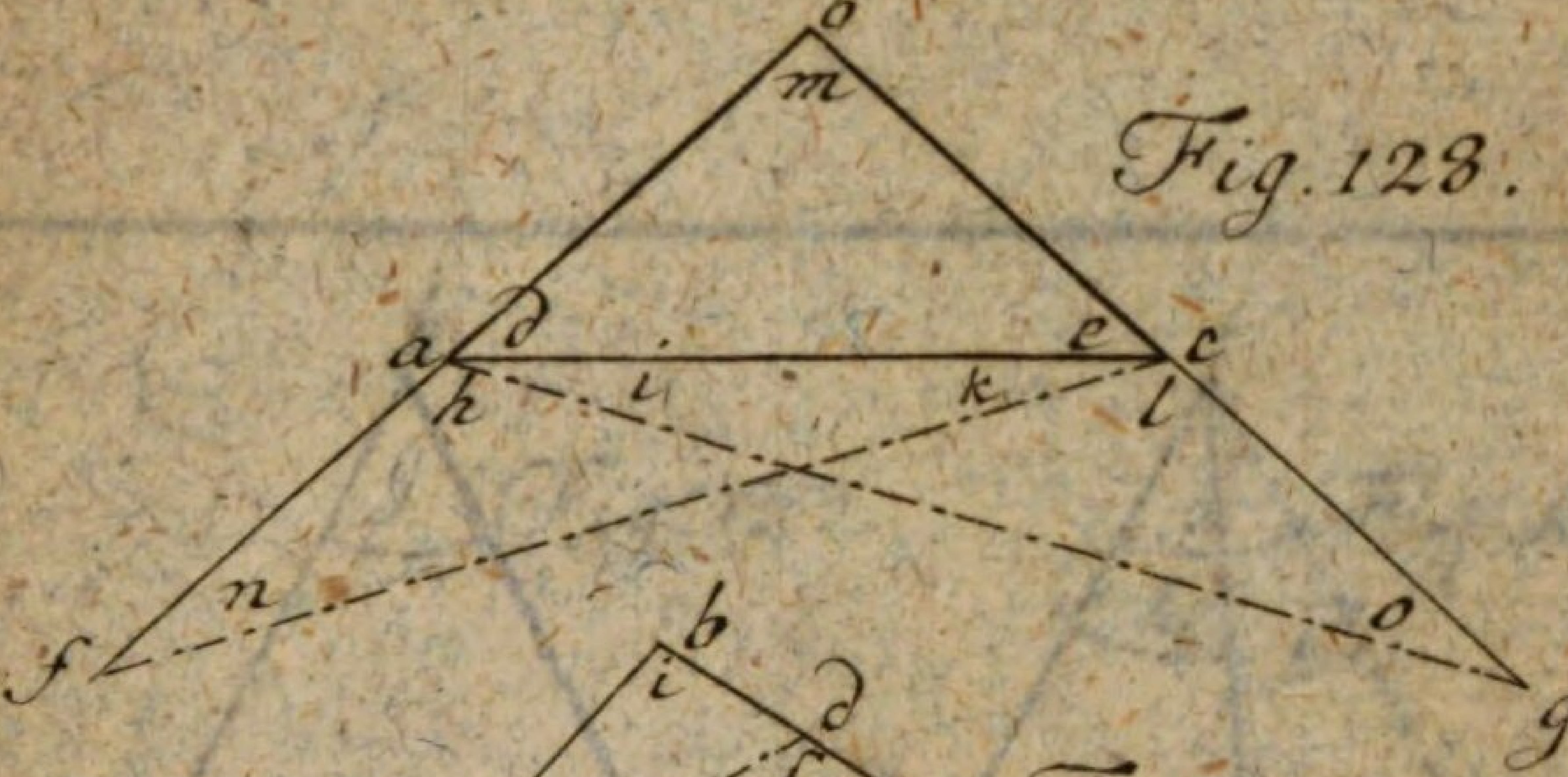


Fig. 128.

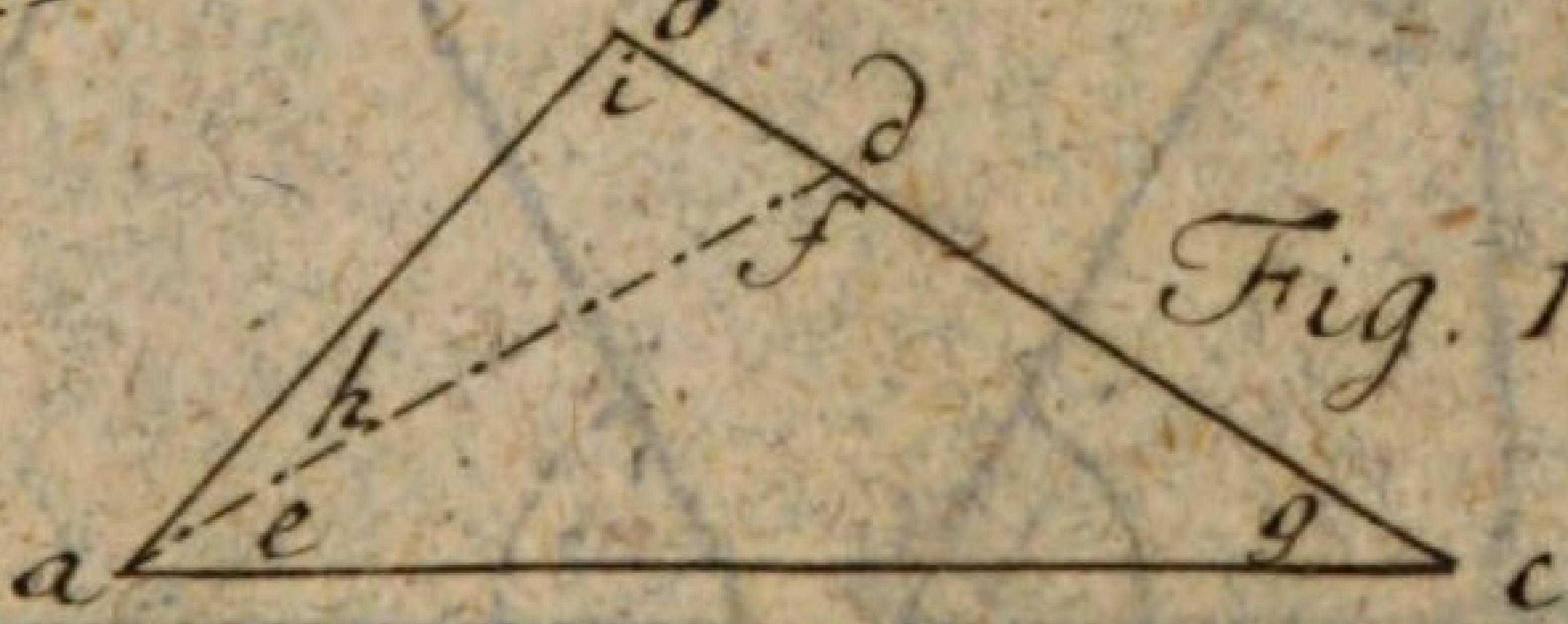


Fig. 129.

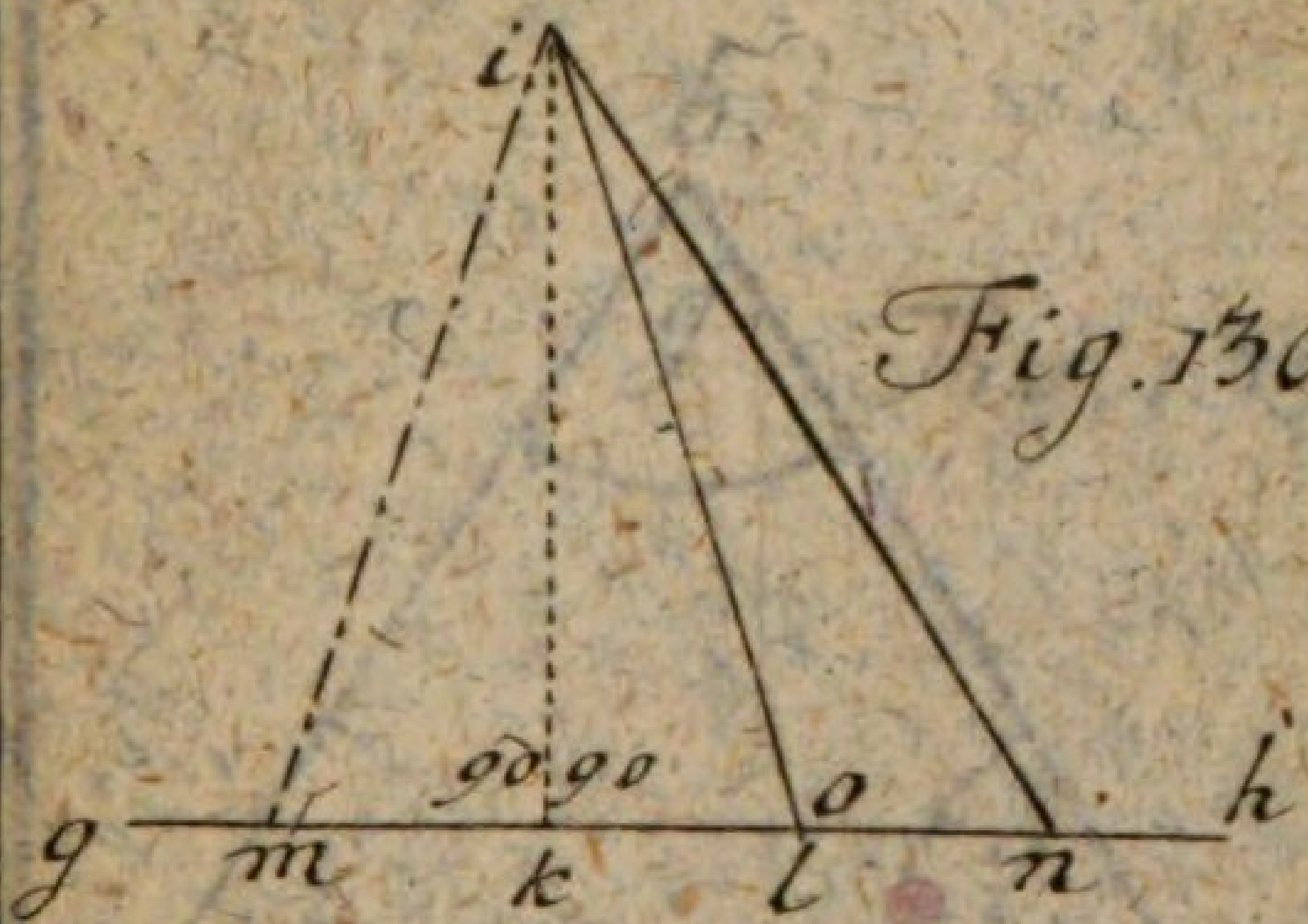


Fig. 130

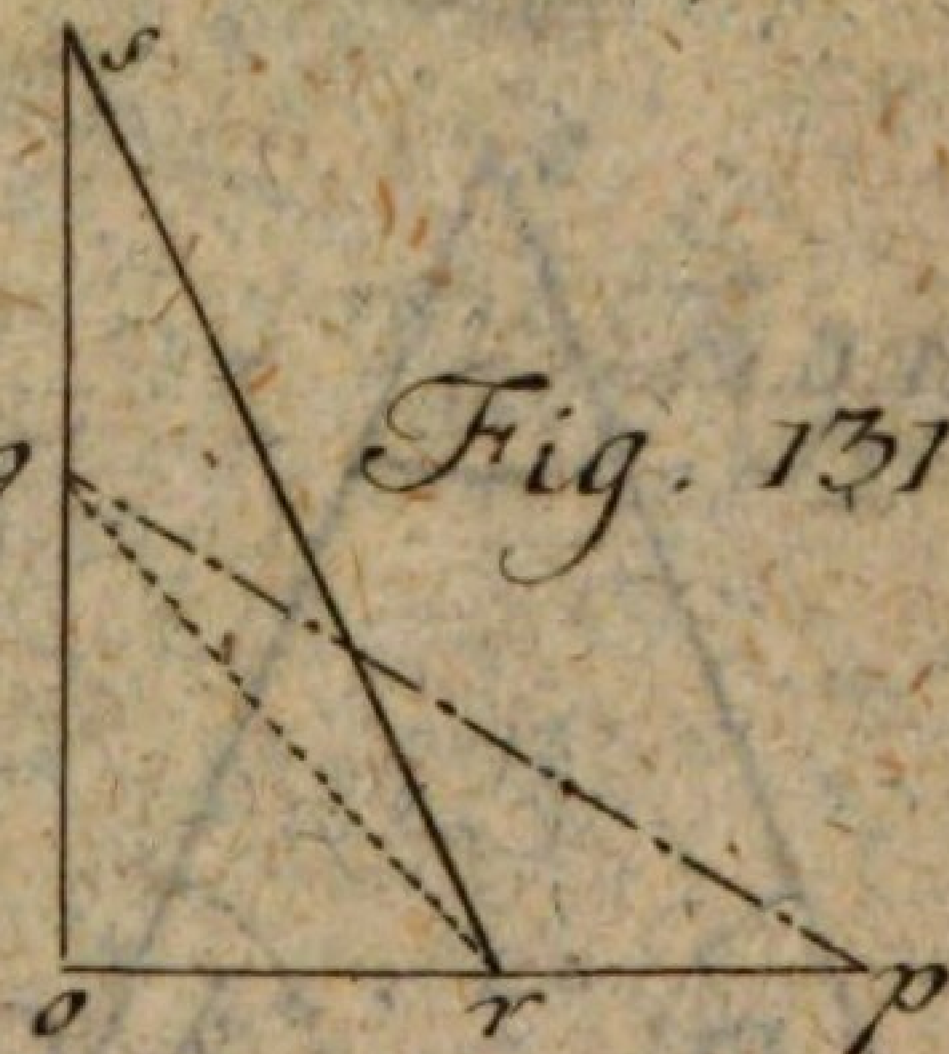


Fig. 131.

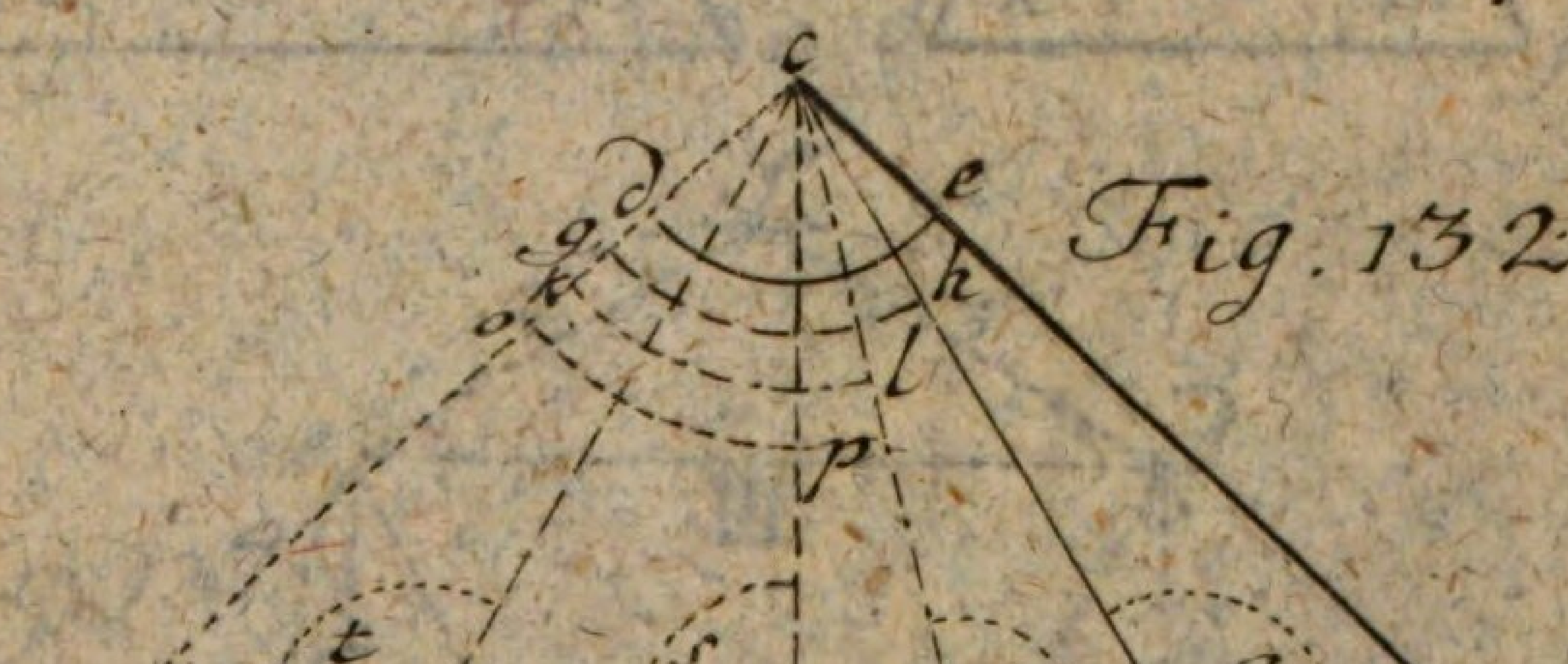


Fig. 132.

Tab. XXVIII

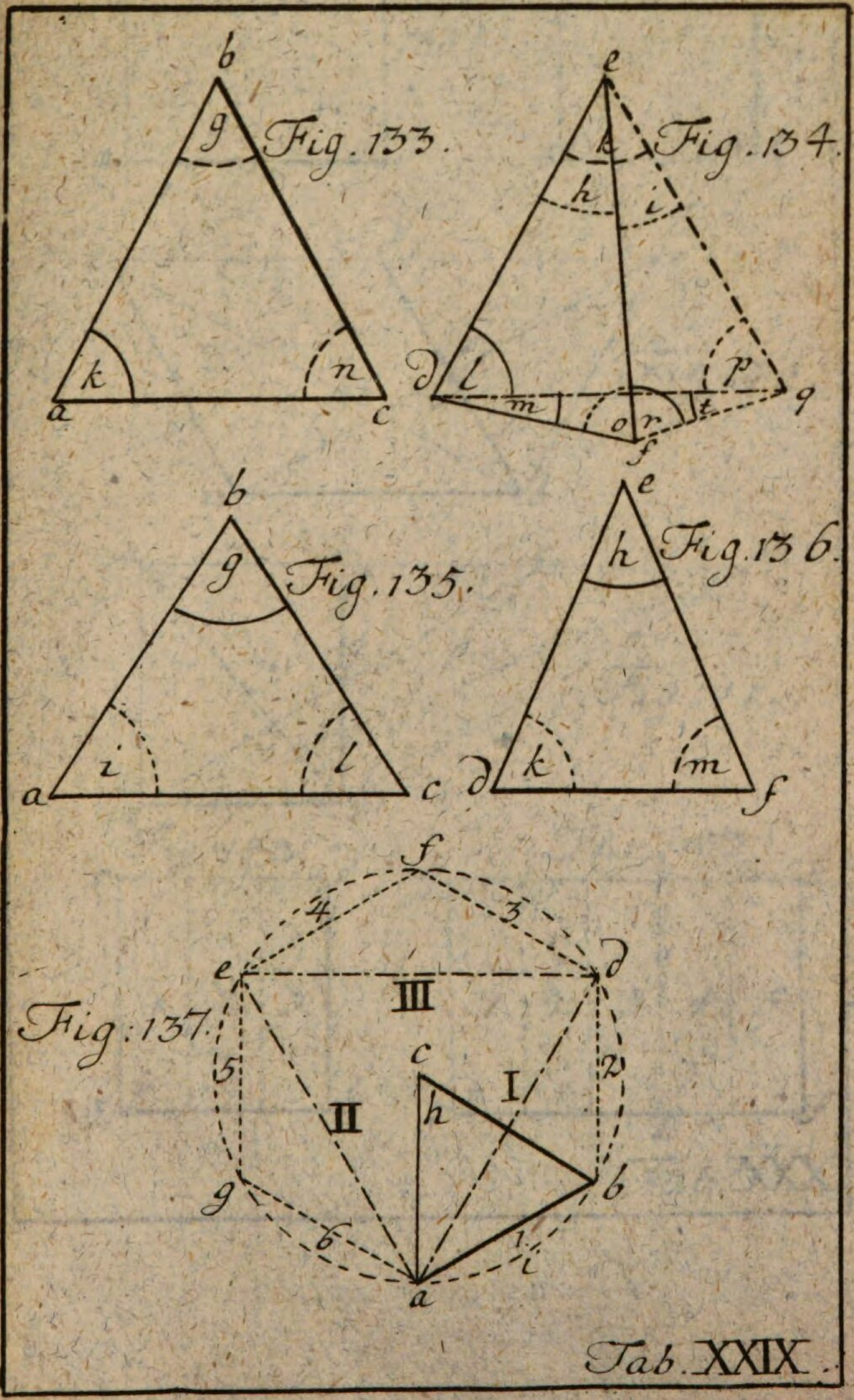


Fig. 133.
b
g
k
n
a
c
Fig. 134.
e
k
h
i
l
p
d
m
o
r
t
g
f
Fig. 135.
b
g
i
l
a
c
Fig. 136.
e
h
k
m
d
f
Fig: 137.
f
4
3
e
d
III
c
5
2
h
I
II
g
b
6
1
i
a

Tab. XXIX.

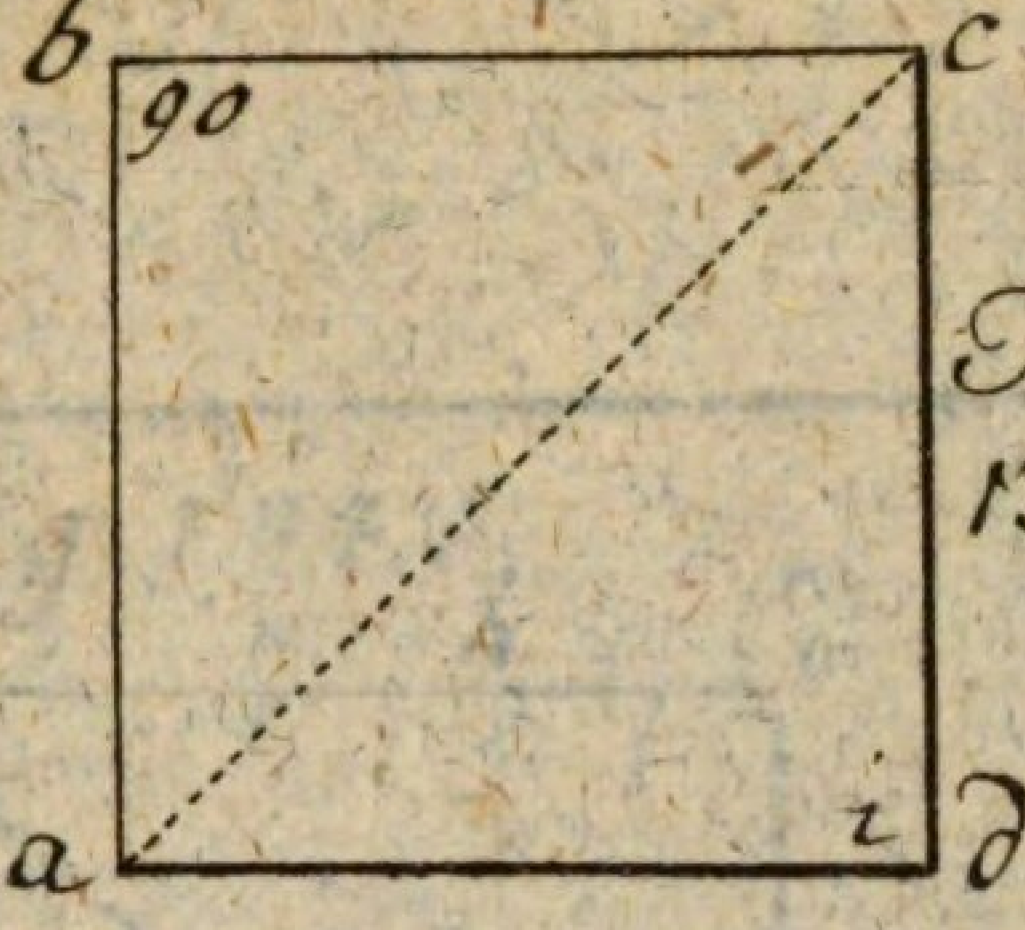
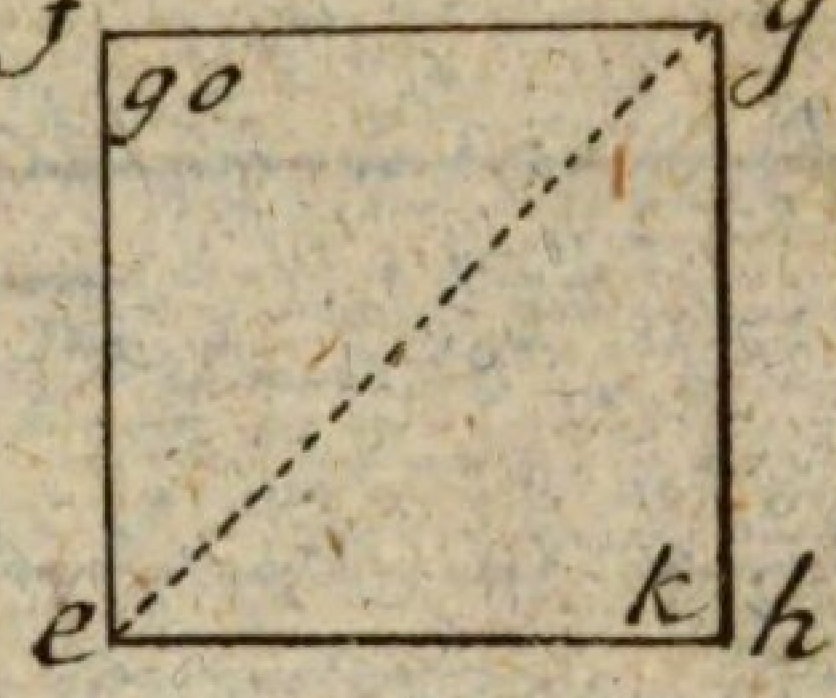


Fig. 138.

Fig. 139.



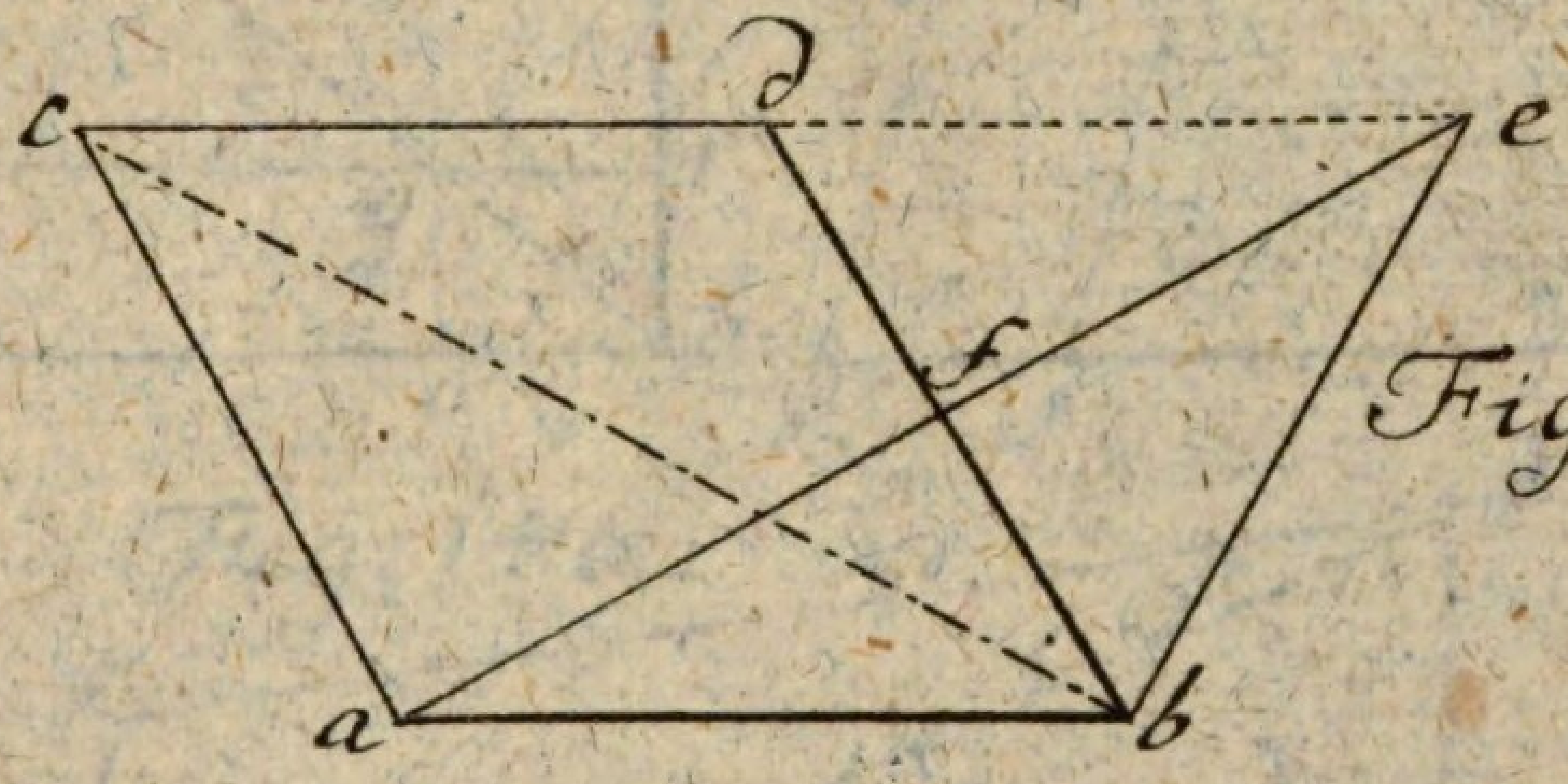


Fig. 140.

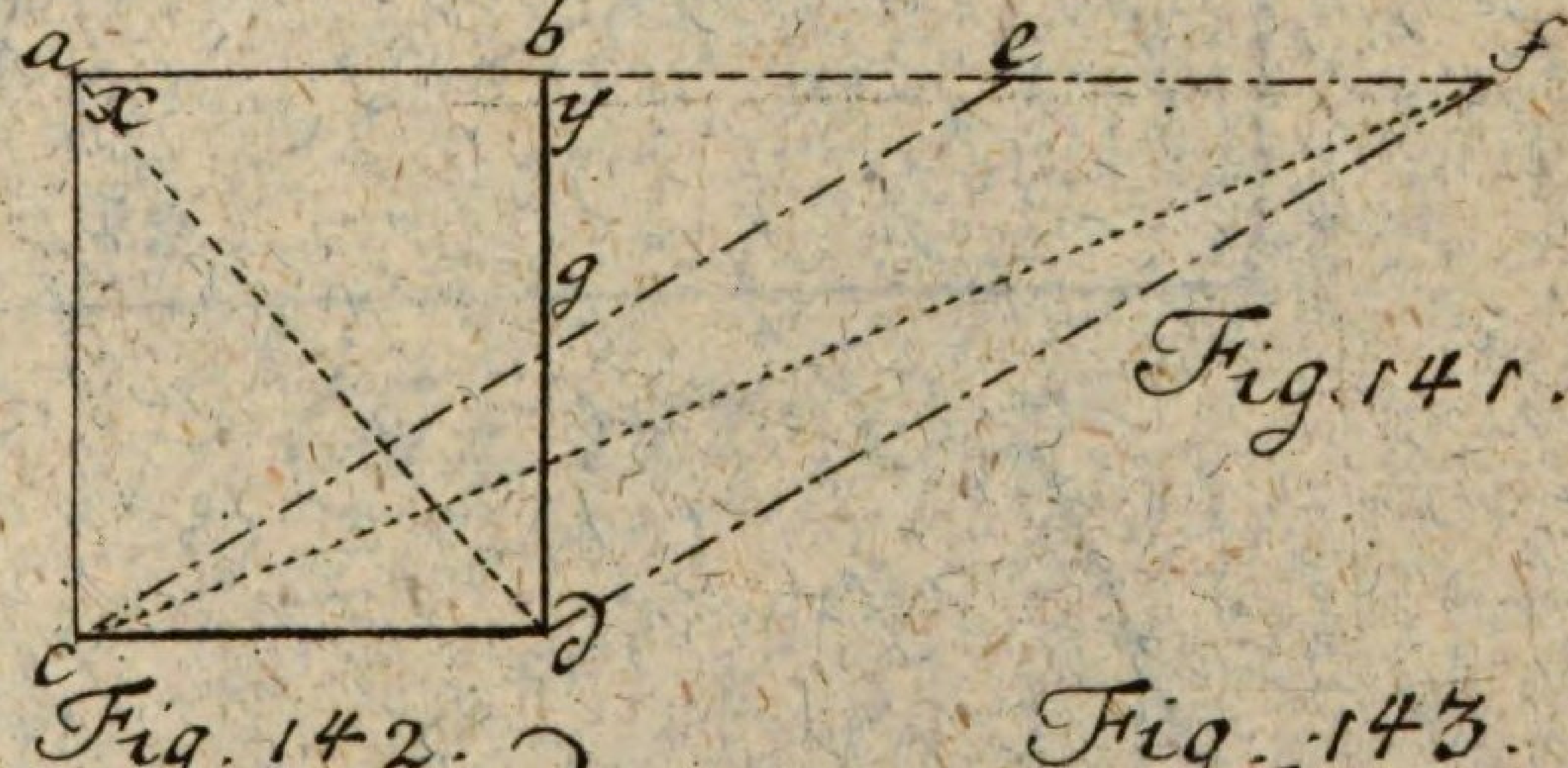


Fig. 141.

Fig. 142.

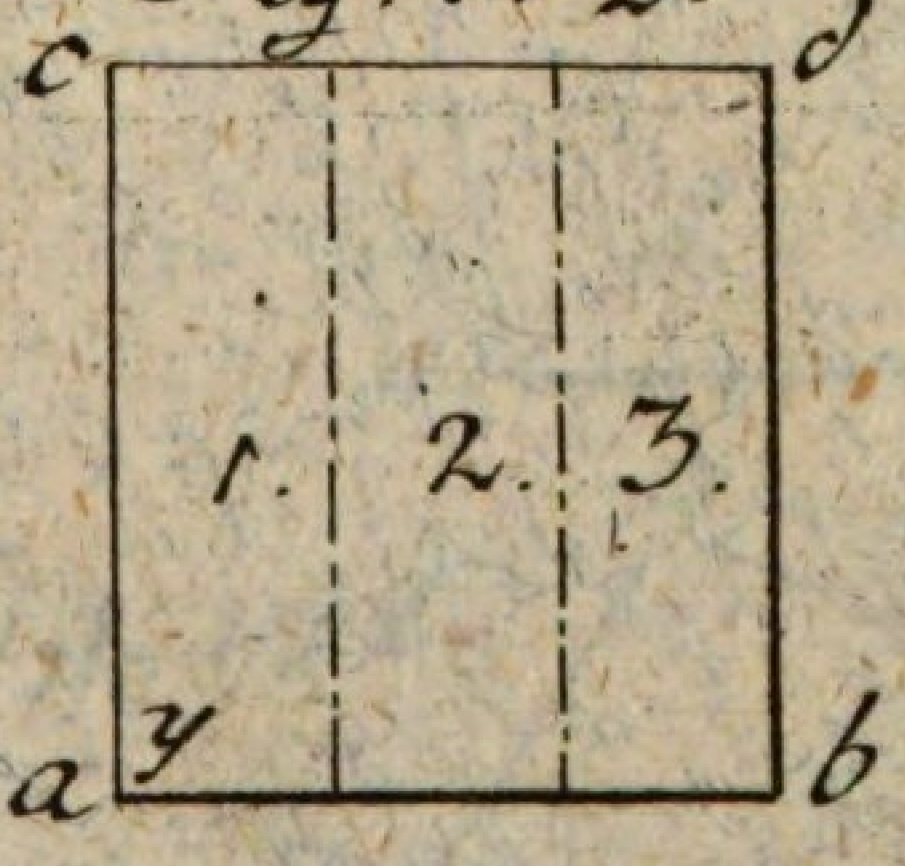
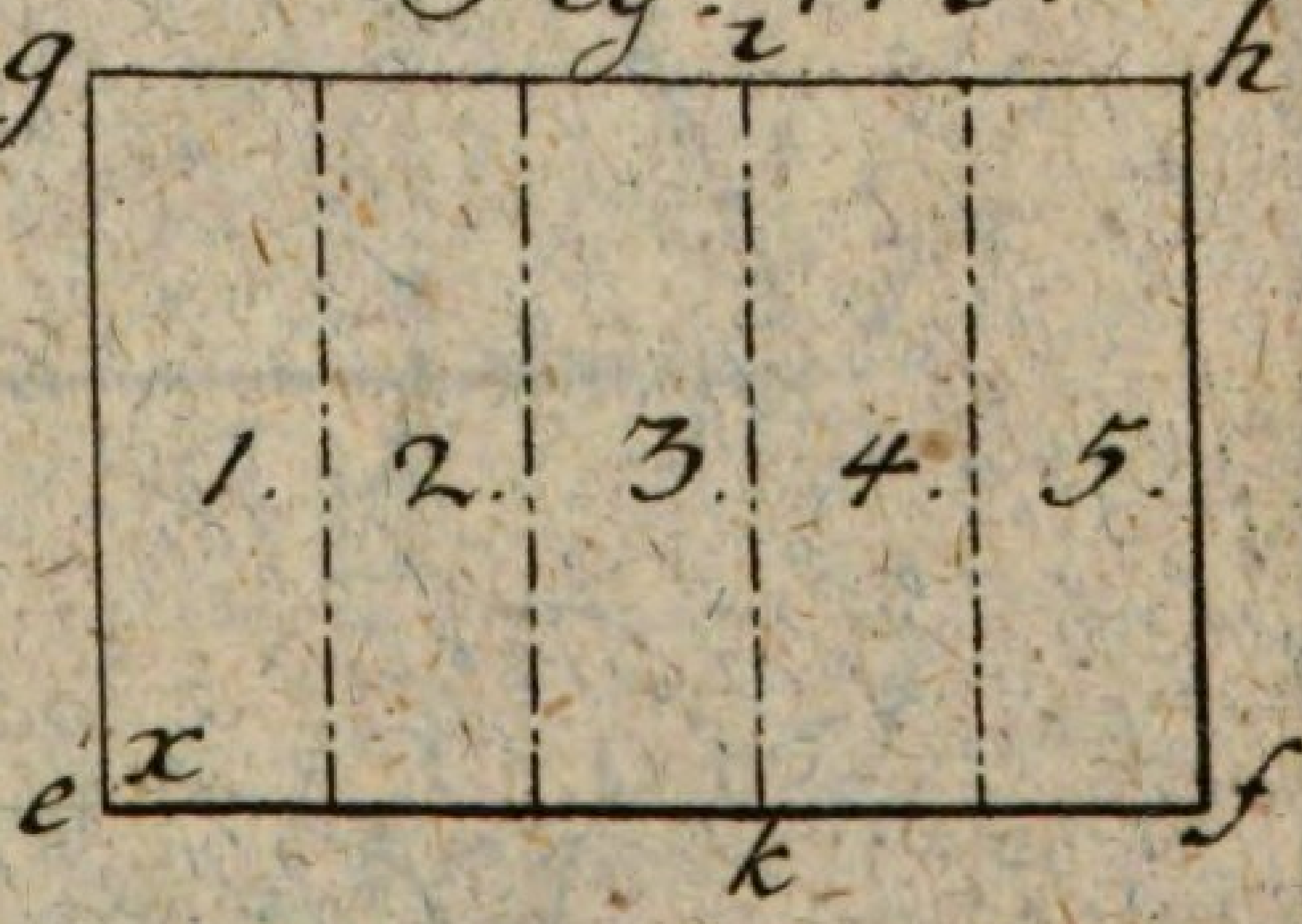


Fig. 143.



Tab. XXX

Fig. 144.

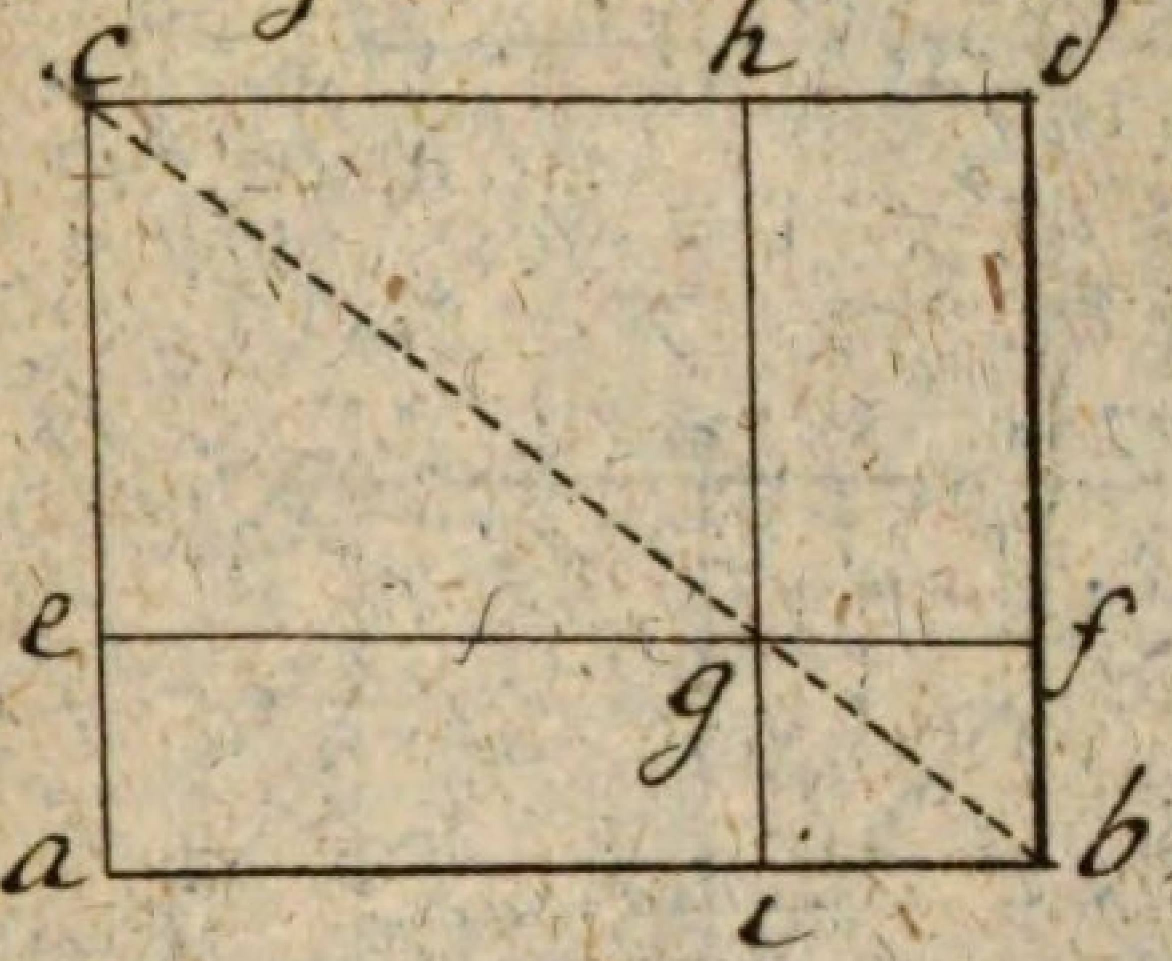


Fig. 145.

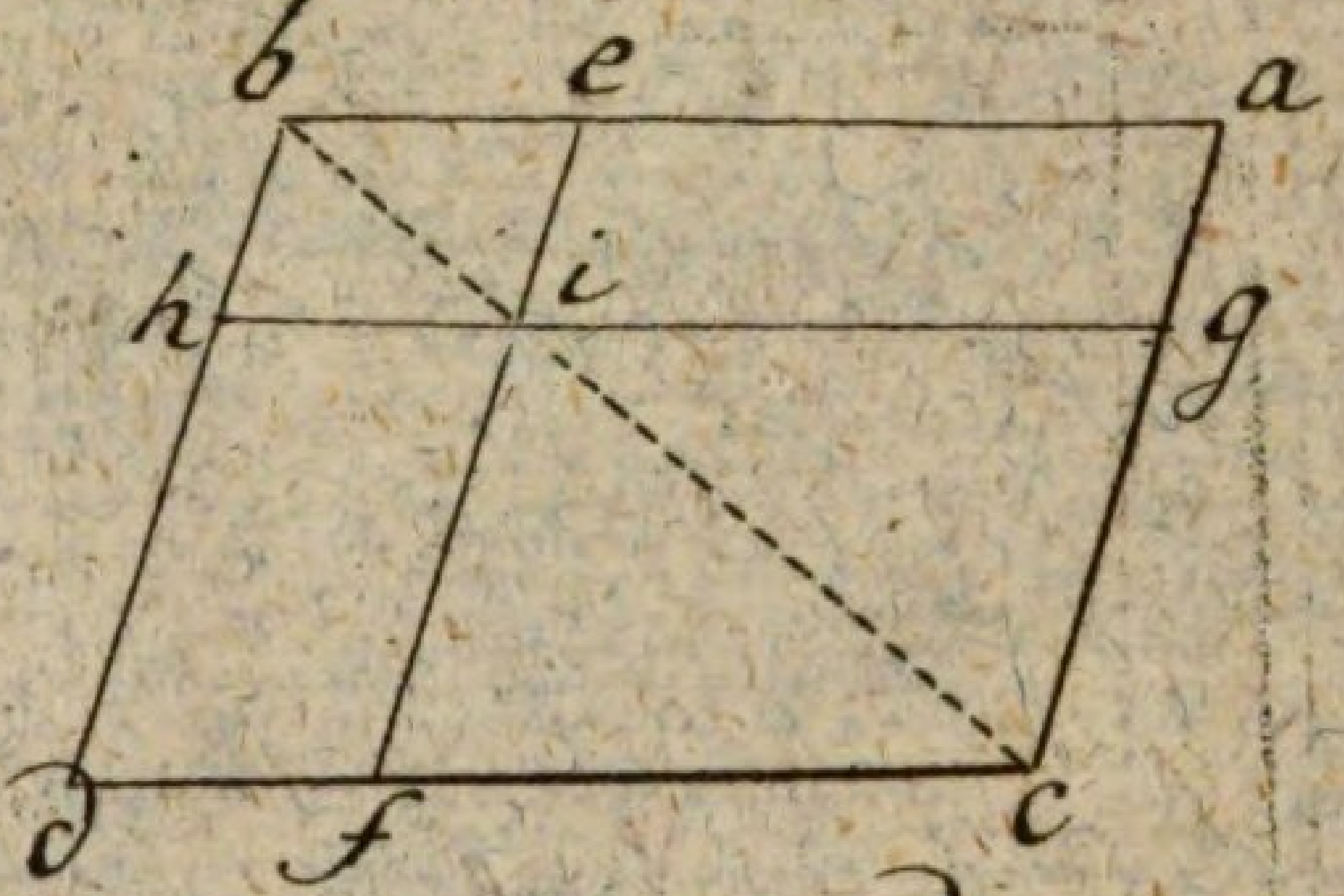


Fig. 146.

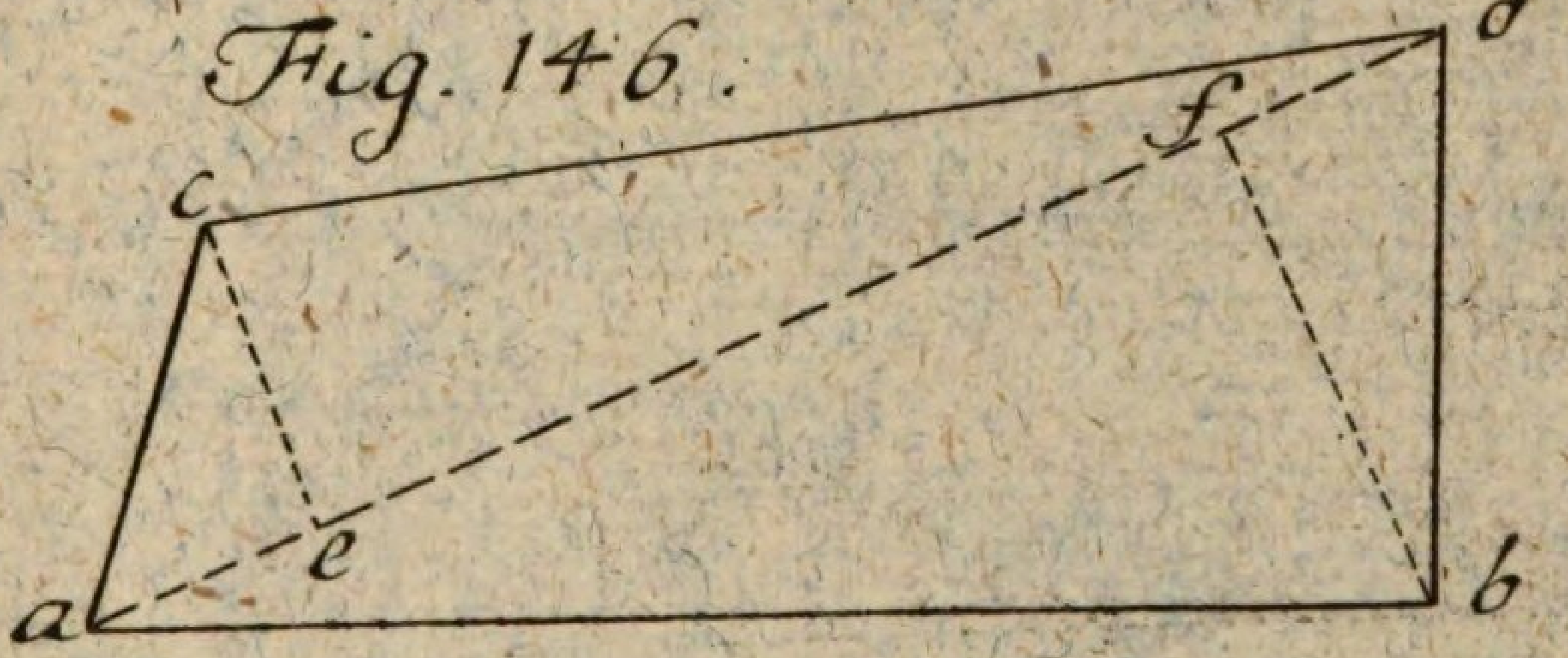


Fig. 147.

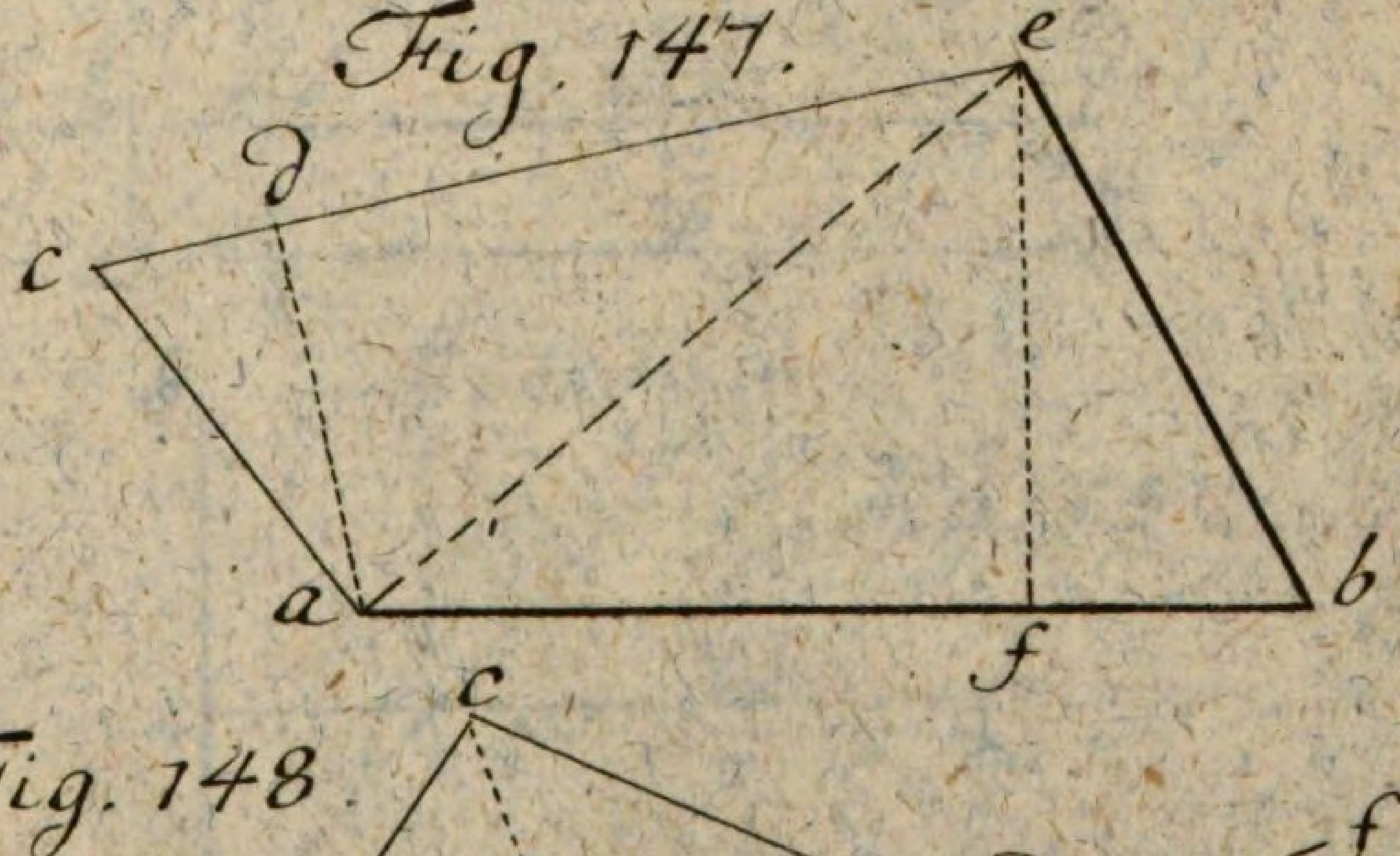
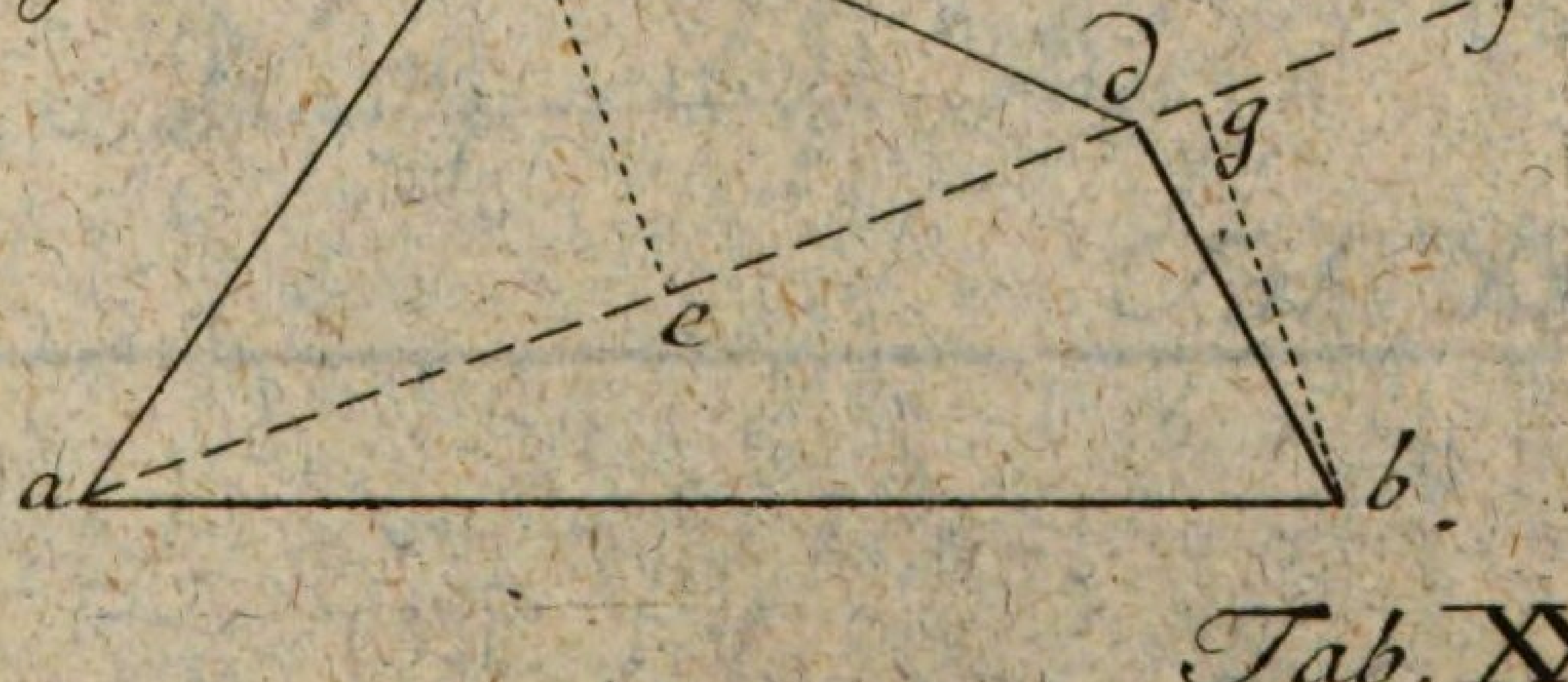


Fig. 148.



Tab. XXXI.

Fig. 149.

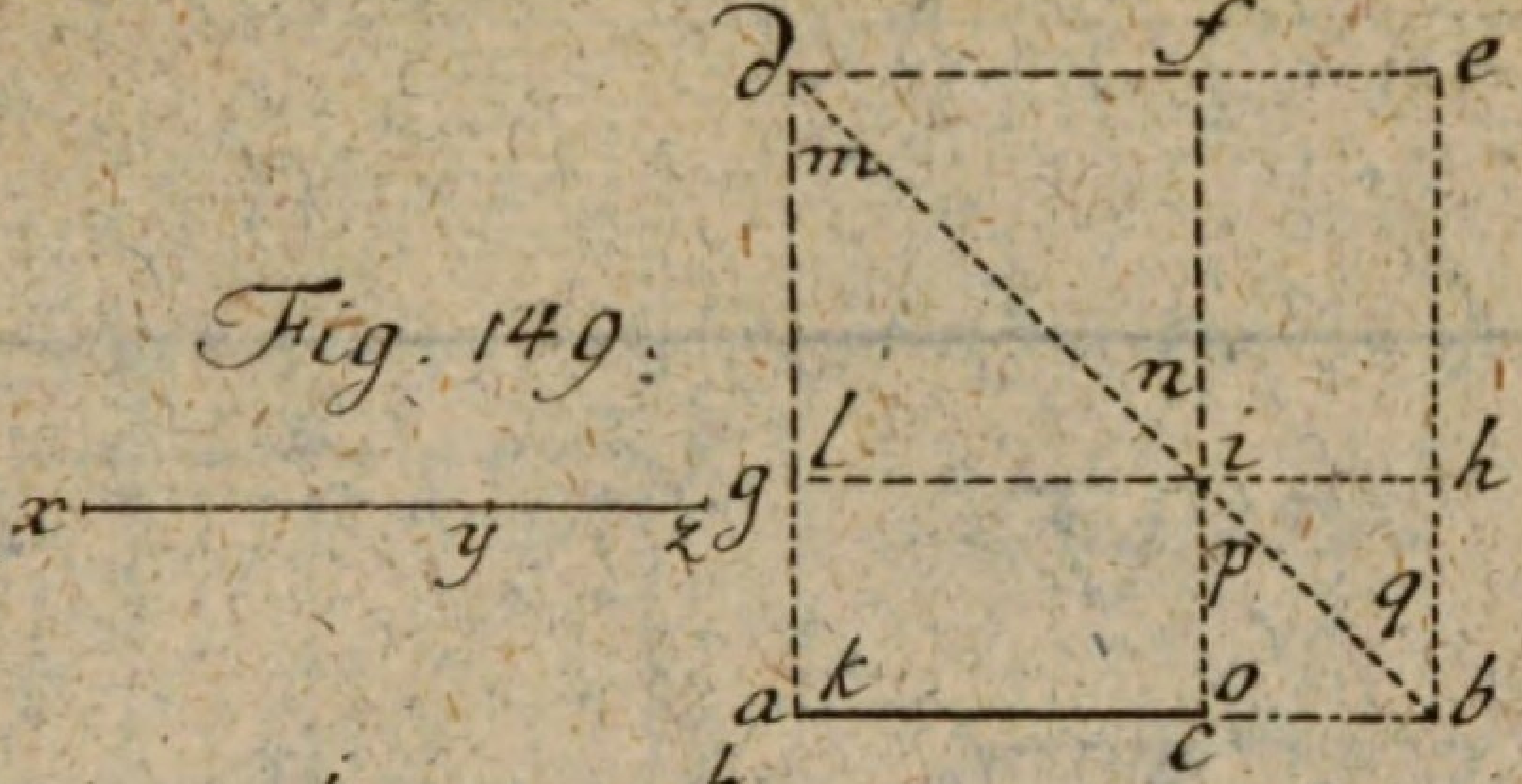


Fig. 150.

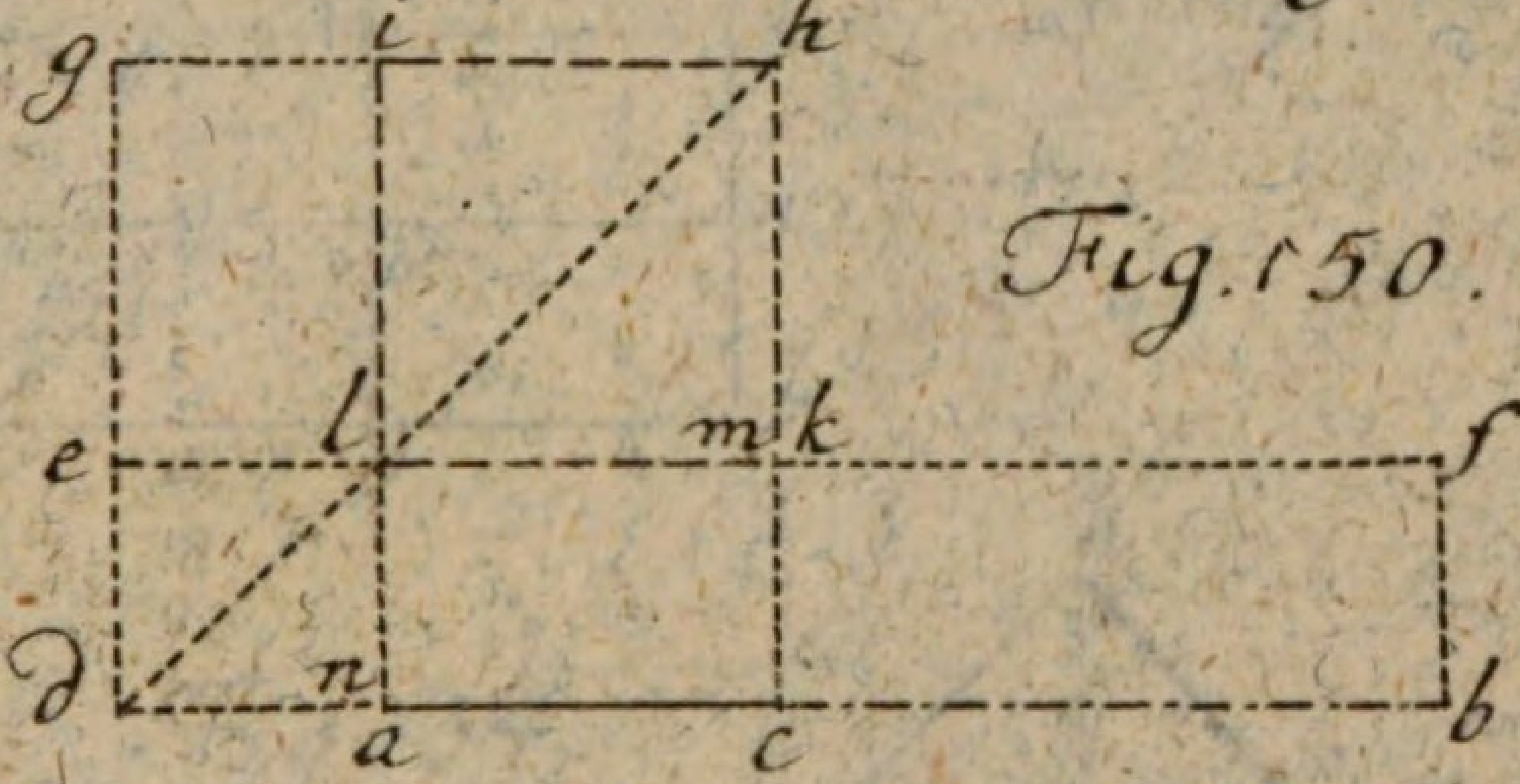


Fig. 151.

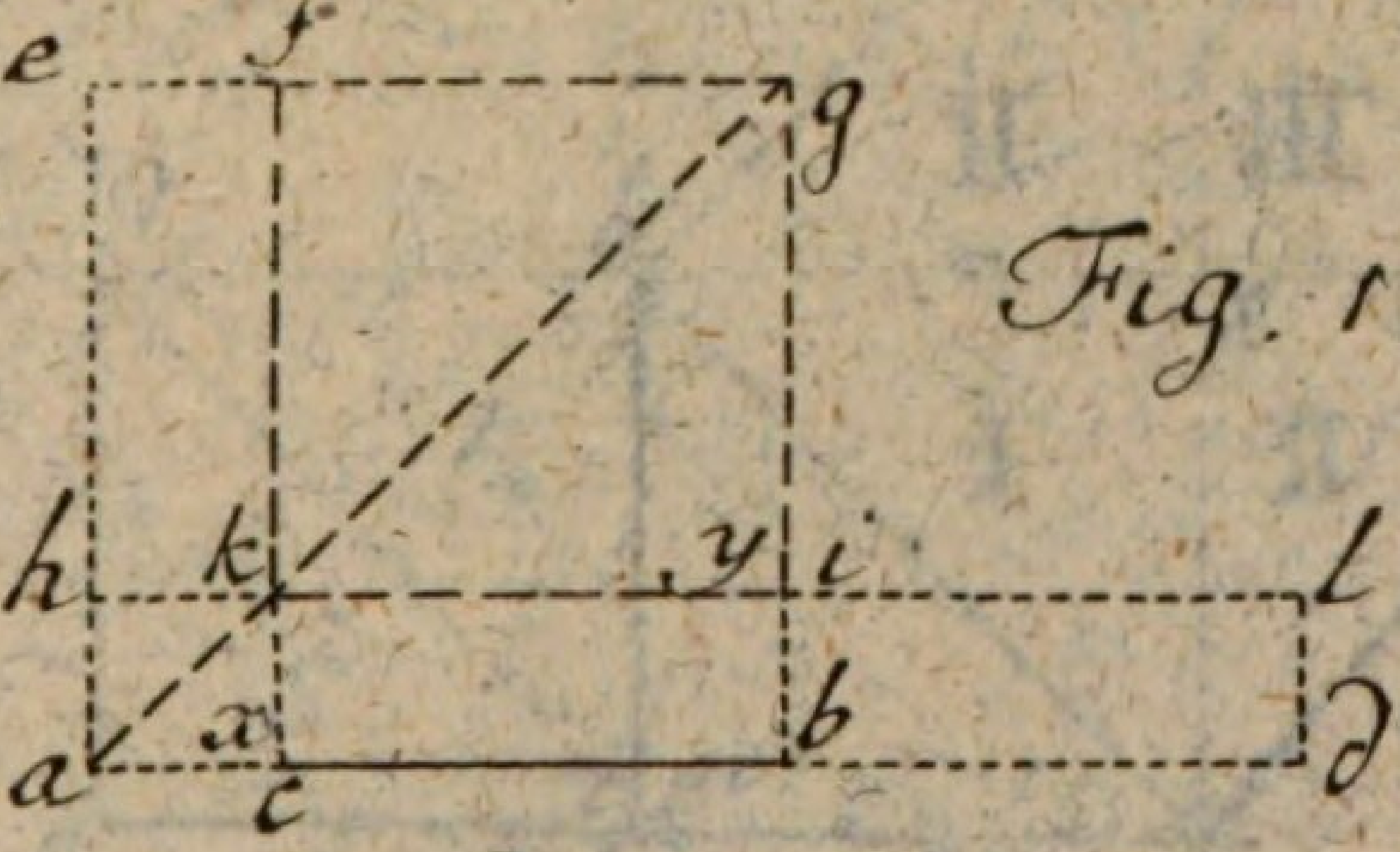
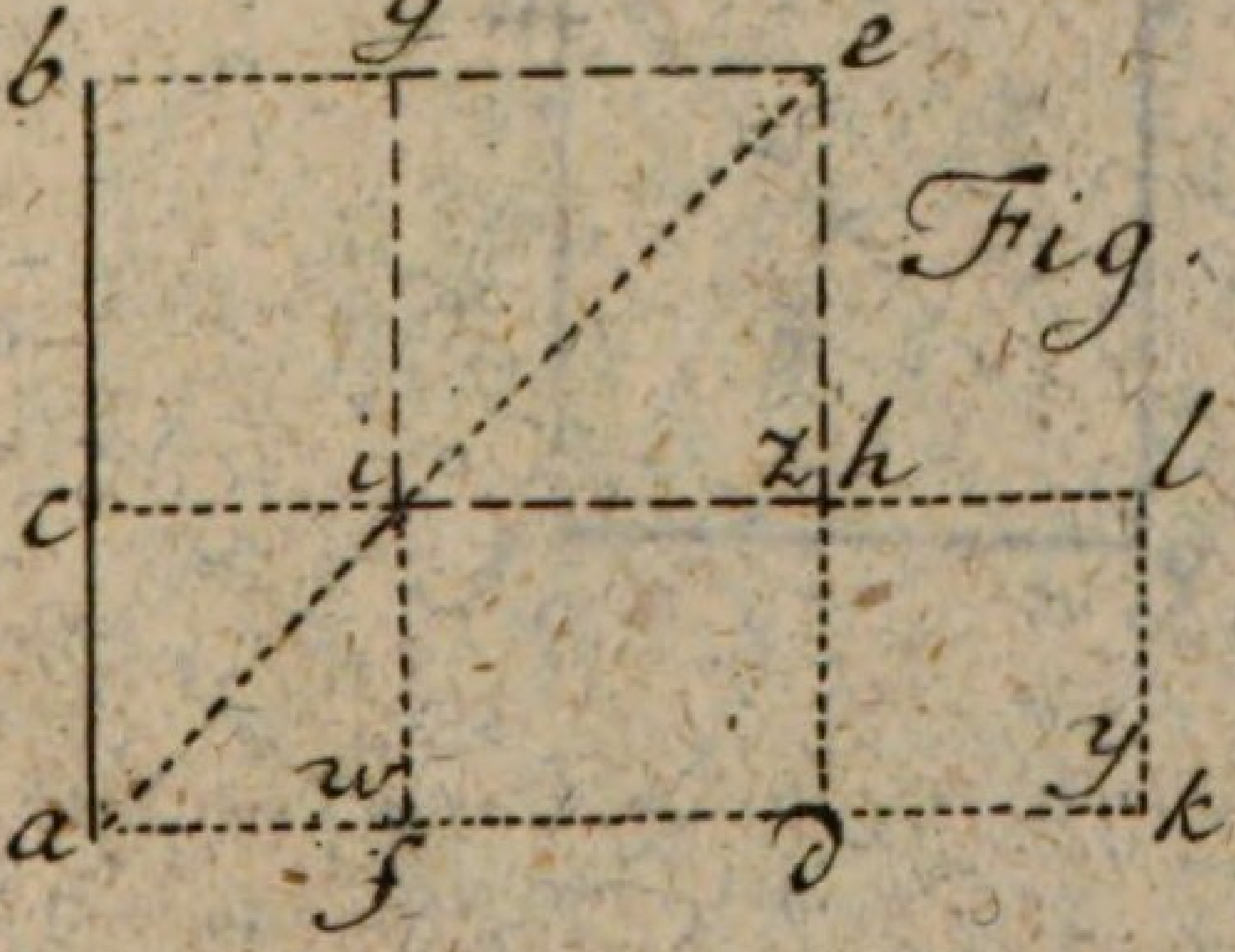


Fig. 152.



Tab. XXXII.

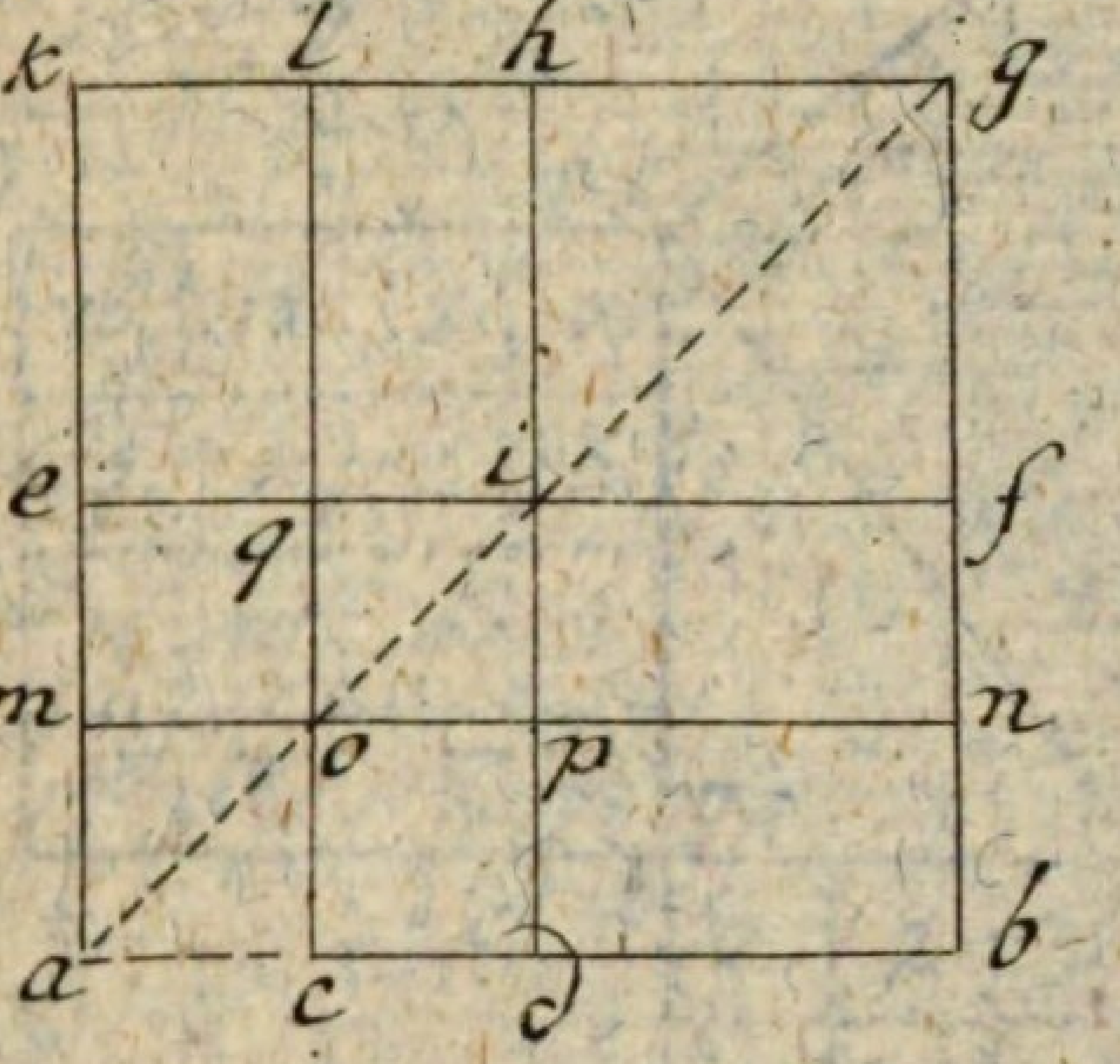


Fig. 153.

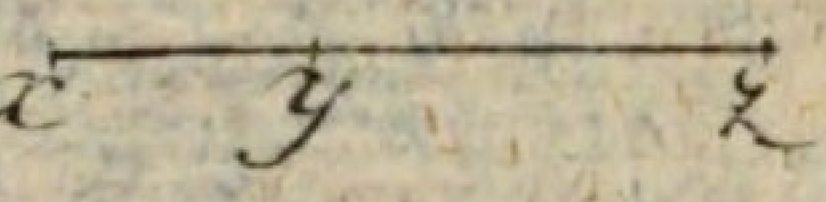
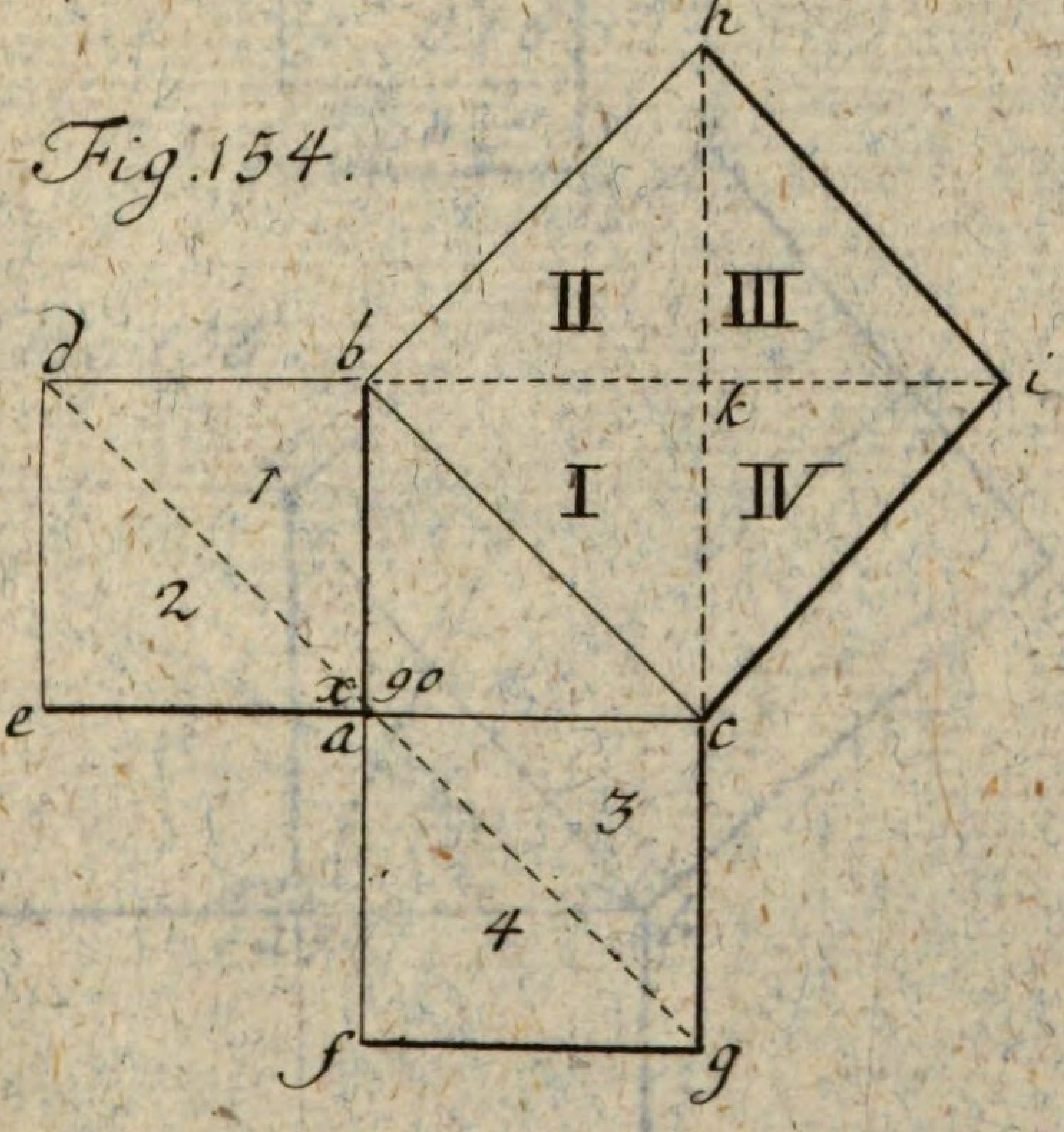


Fig. 154.



Tab. XXXIII.

Fig. 155.

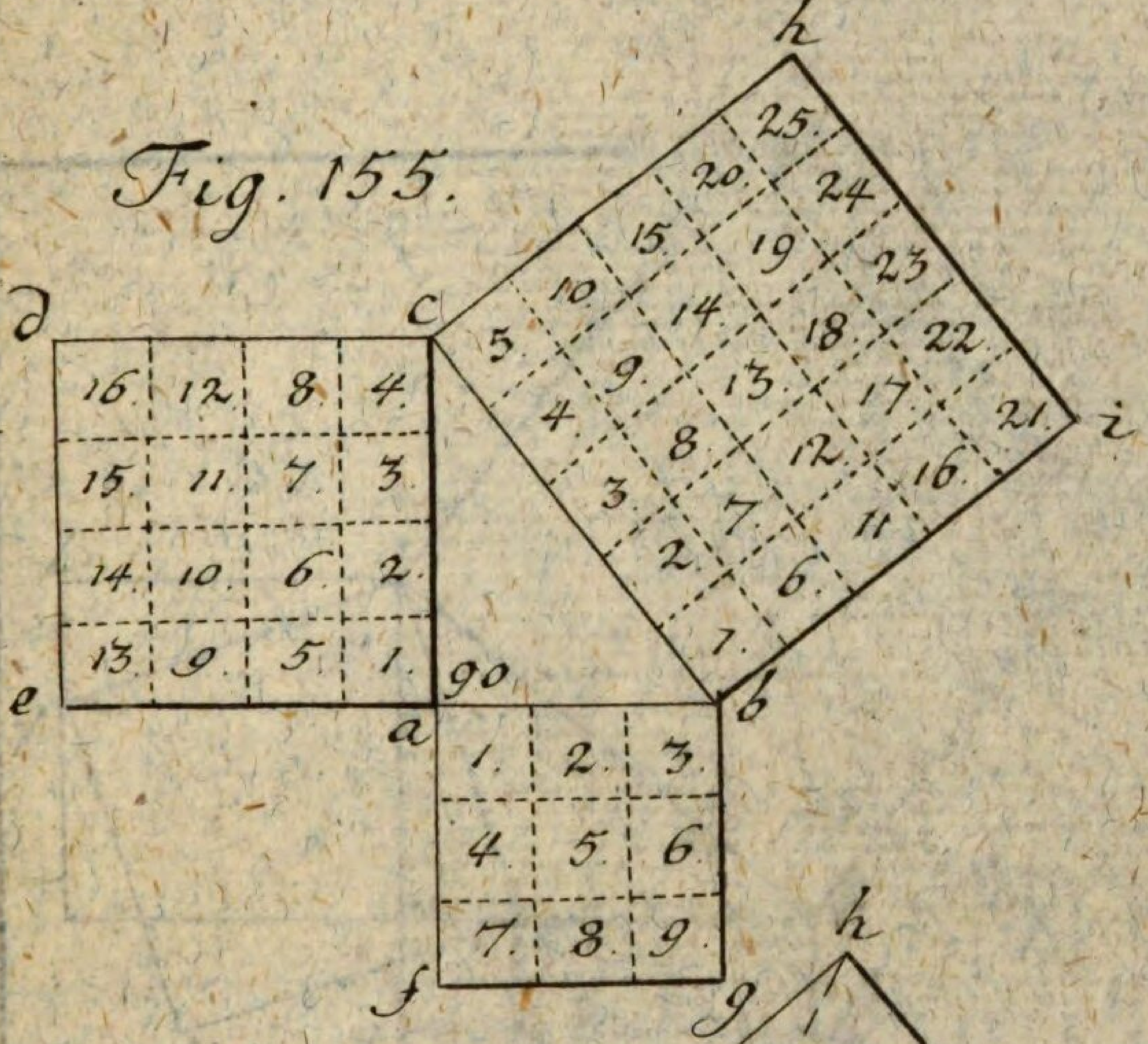
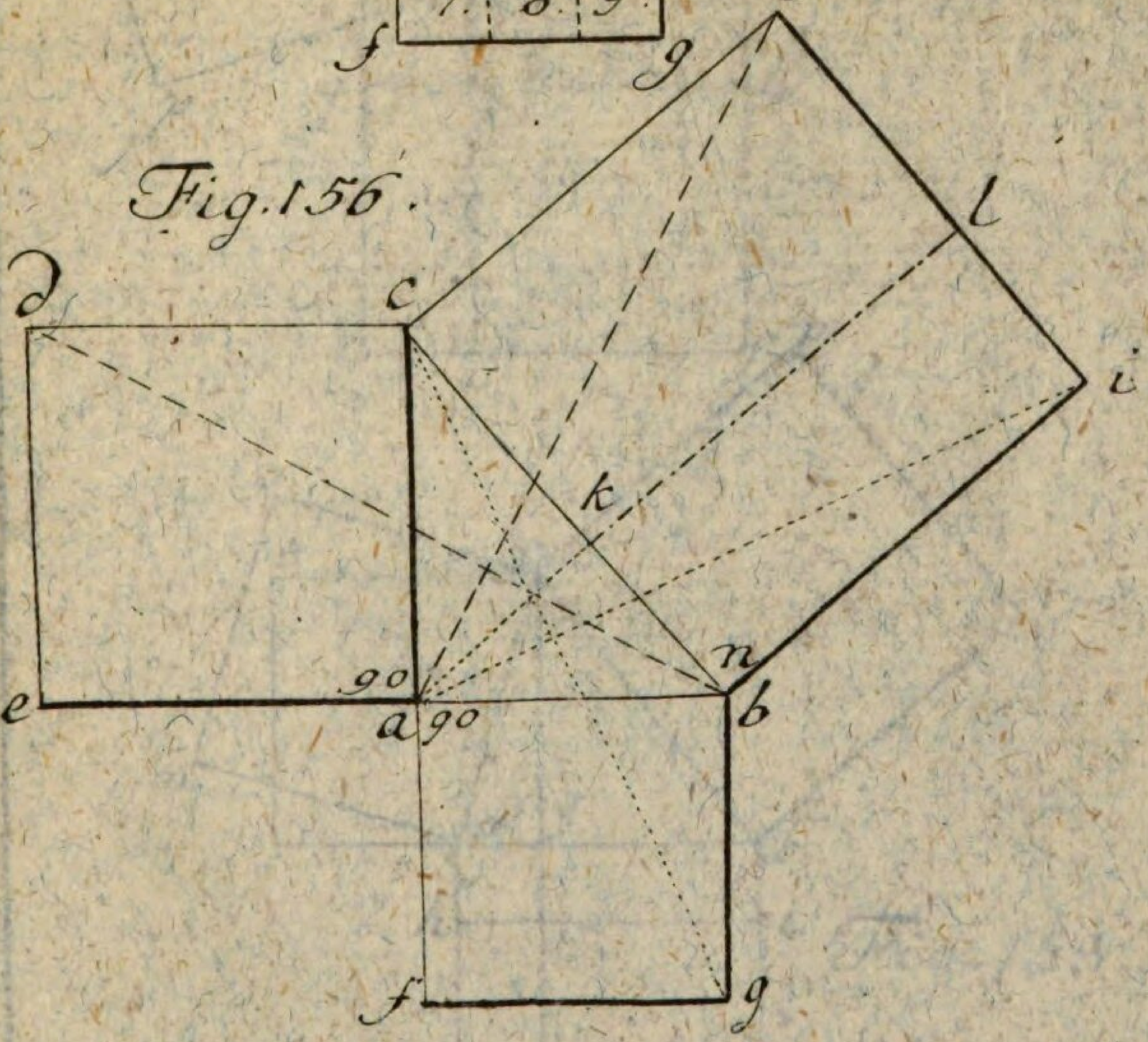


Fig. 156.



Tab. XXXIV.

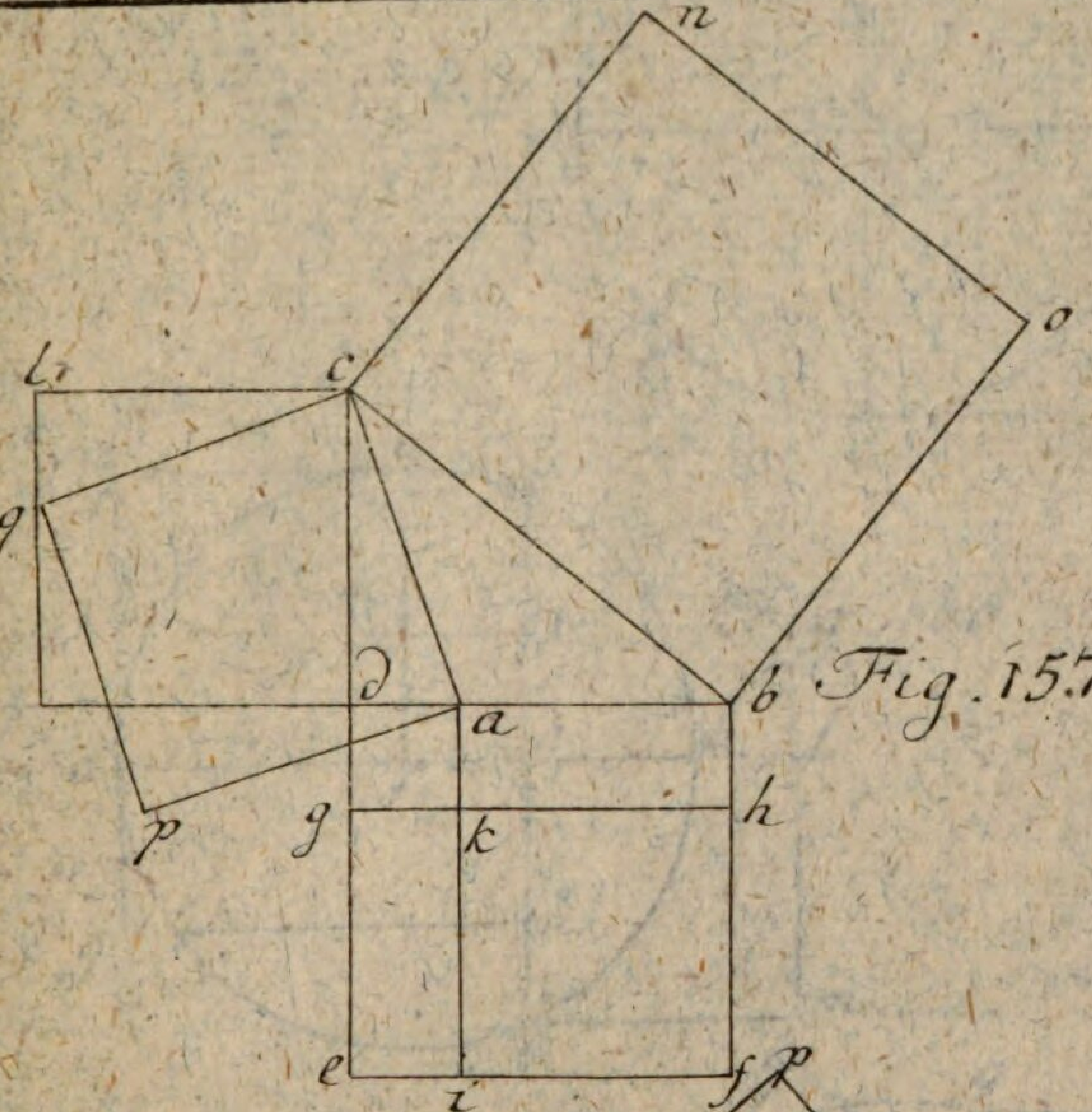


Fig. 157.

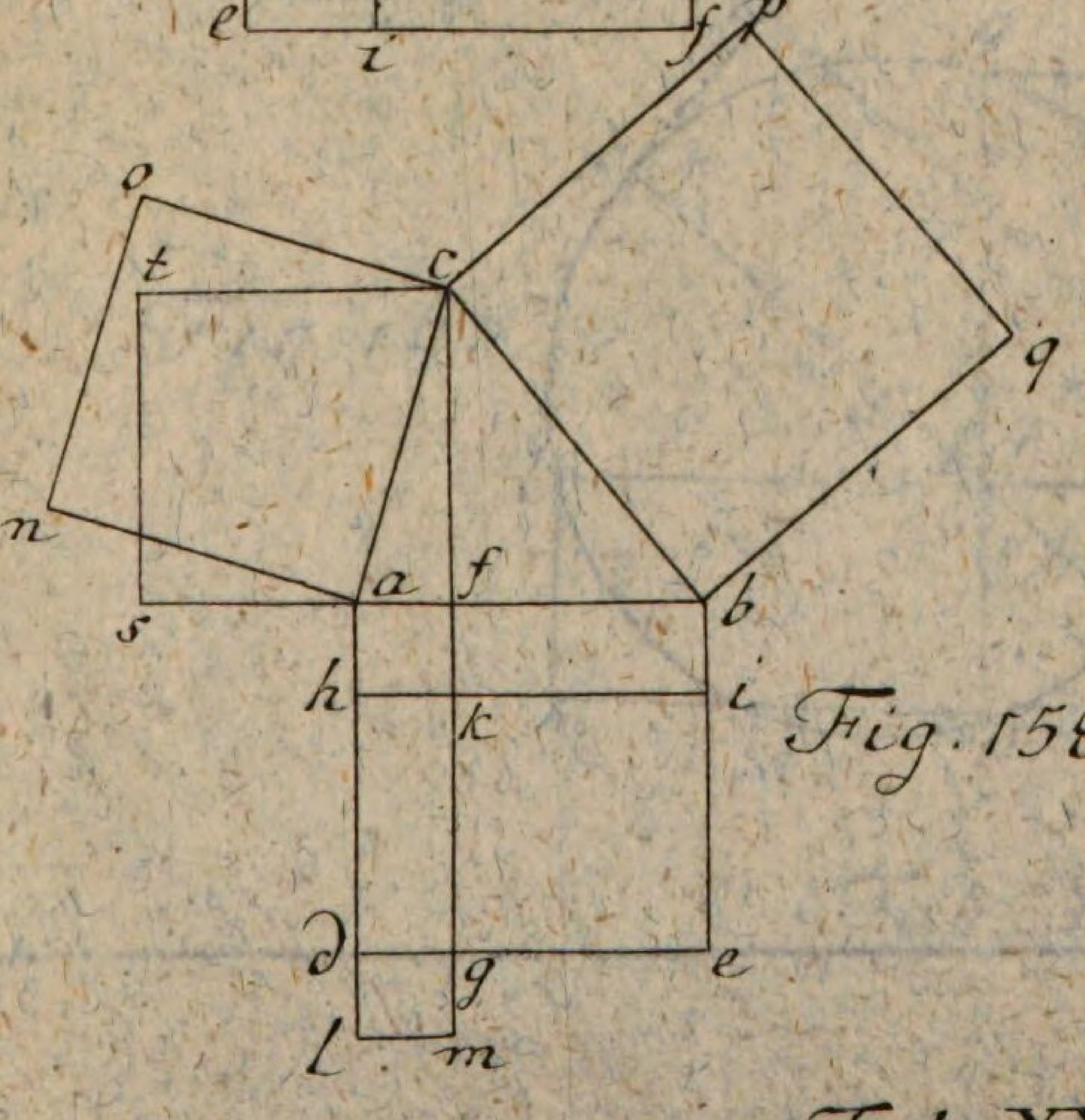


Fig. 158.

Tab. XXXV.

Fig. 159.

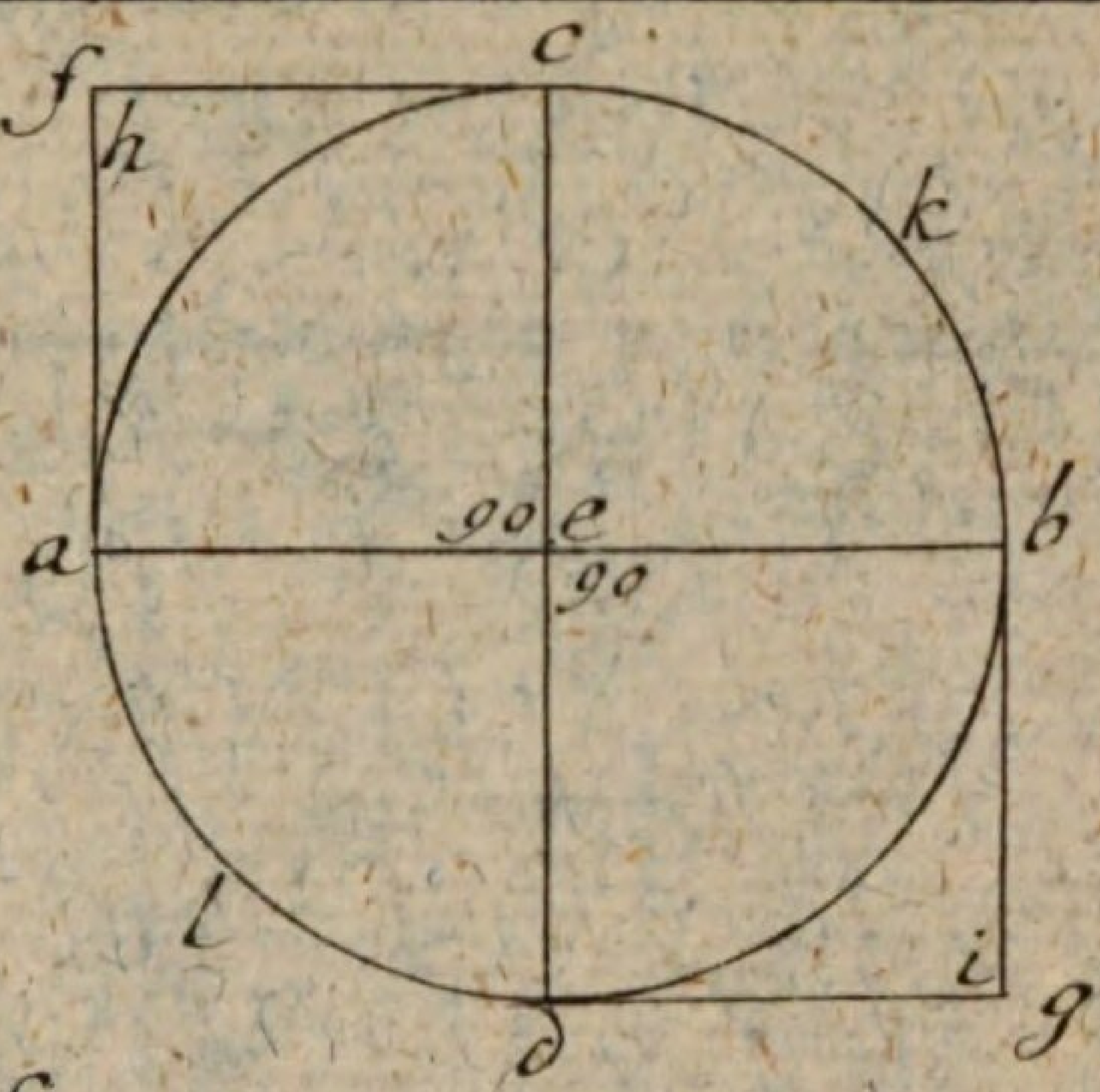


Fig. 160

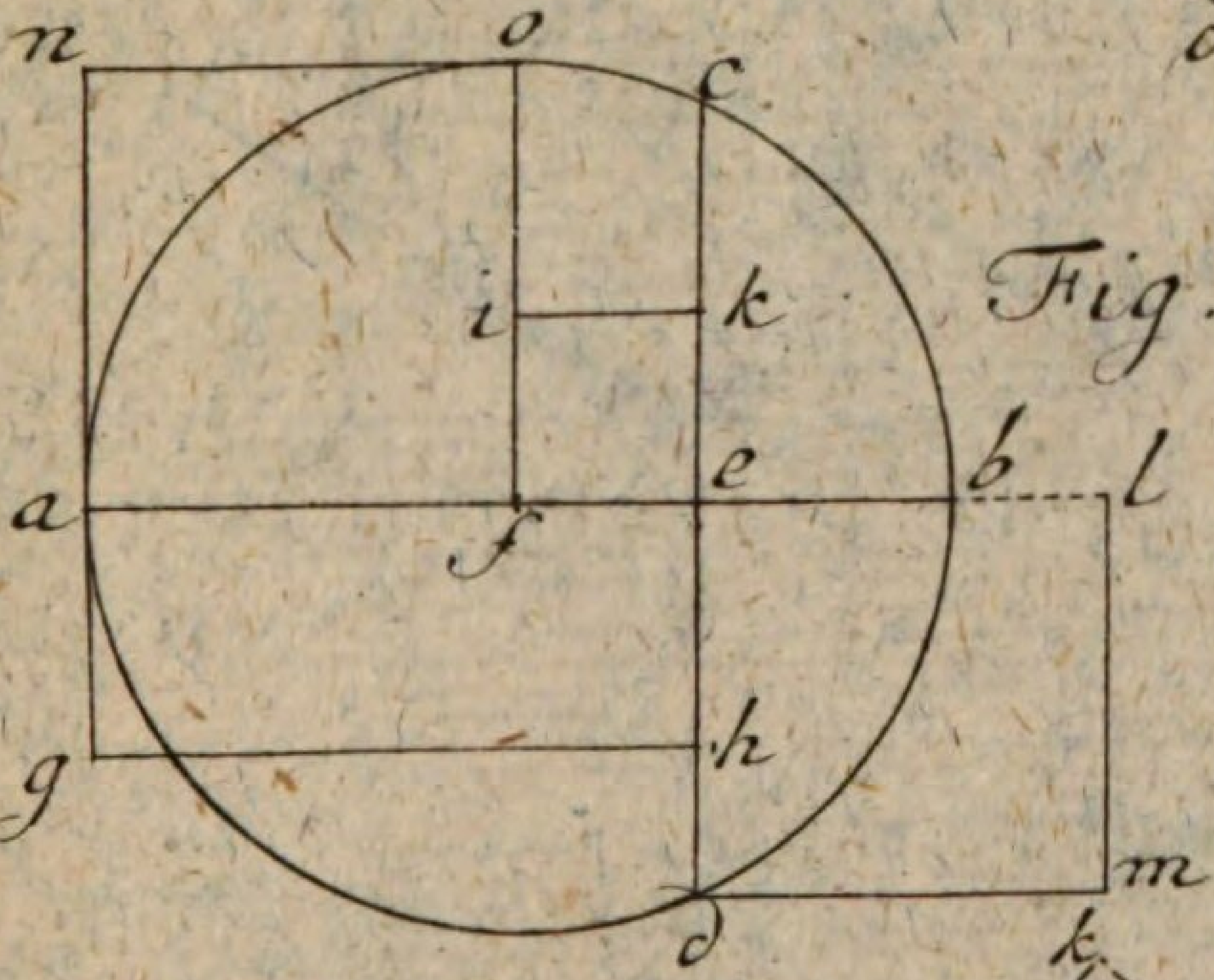
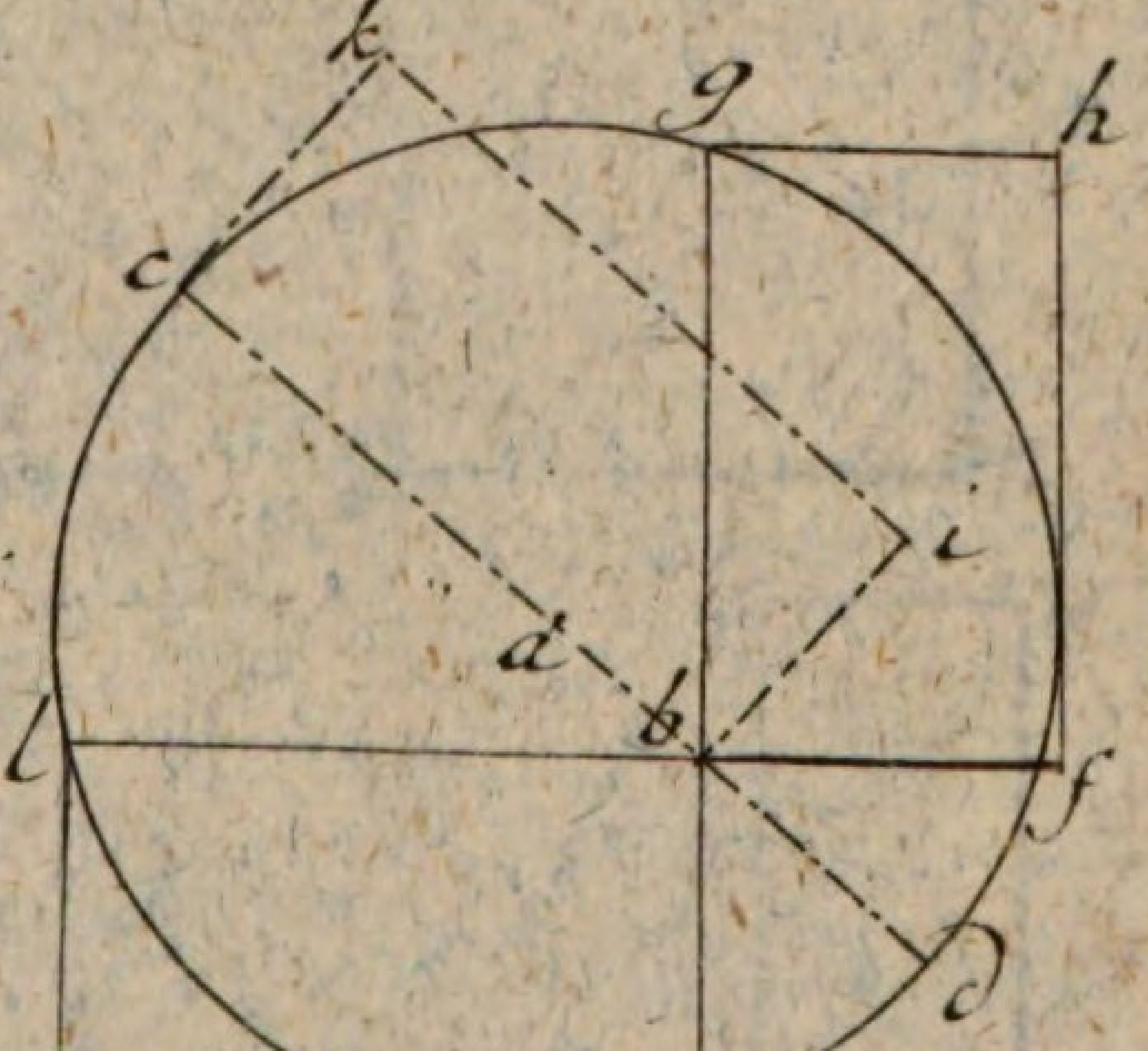


Fig. 161.



de M. del.

Tab. XXXVI.

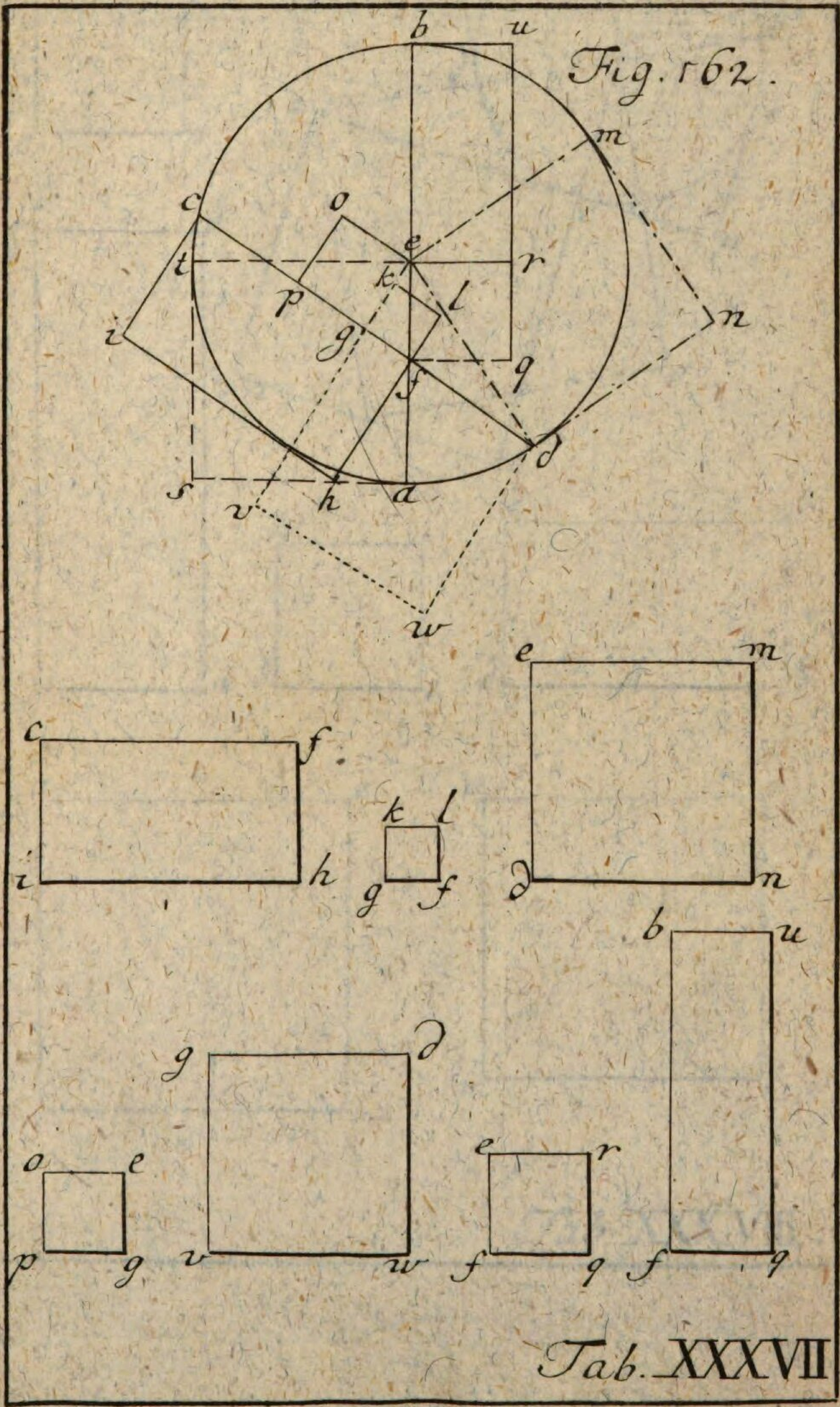
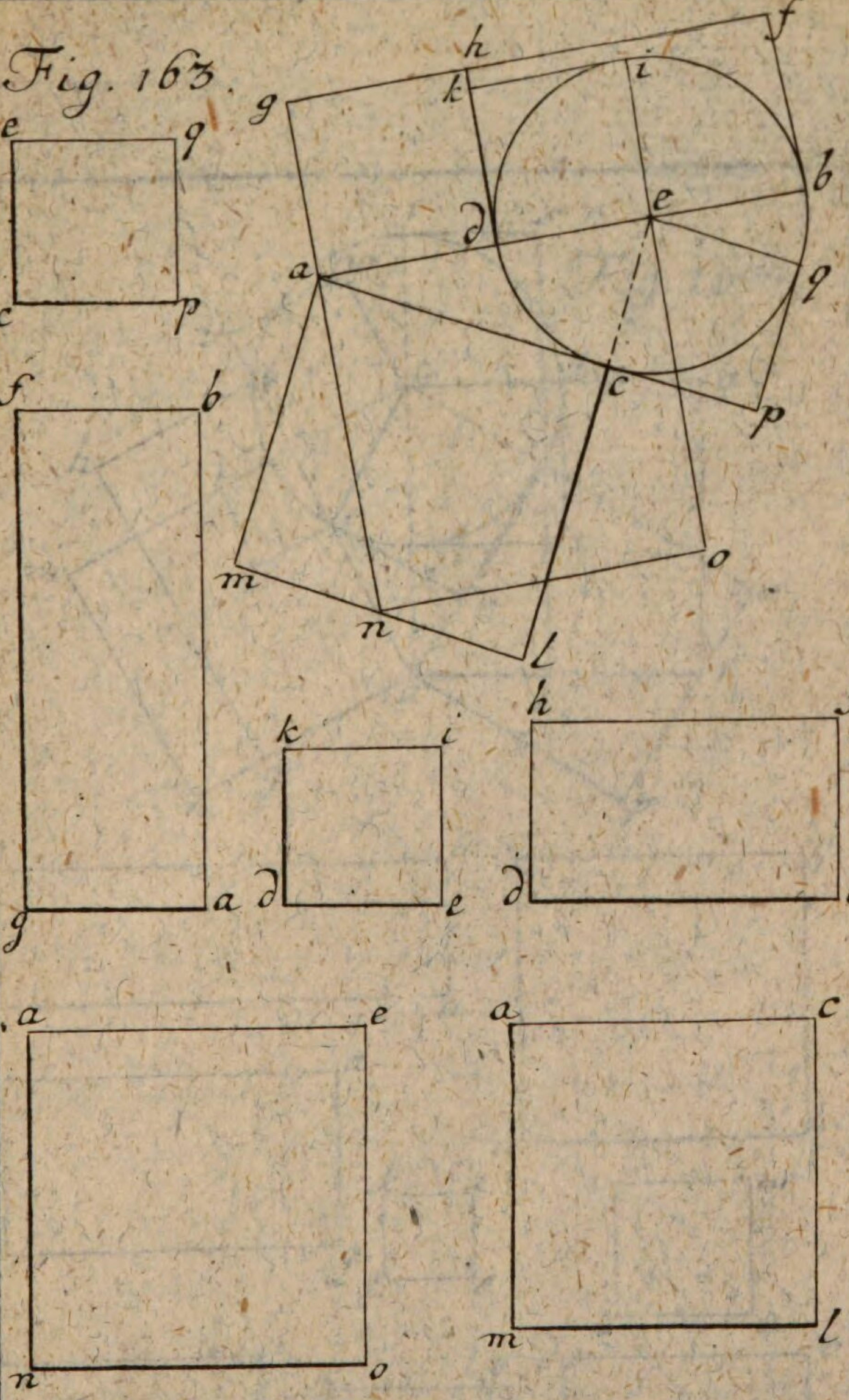


Fig. 162.

Tab. XXXVII

Fig. 163.



Tab: XXXVIII.

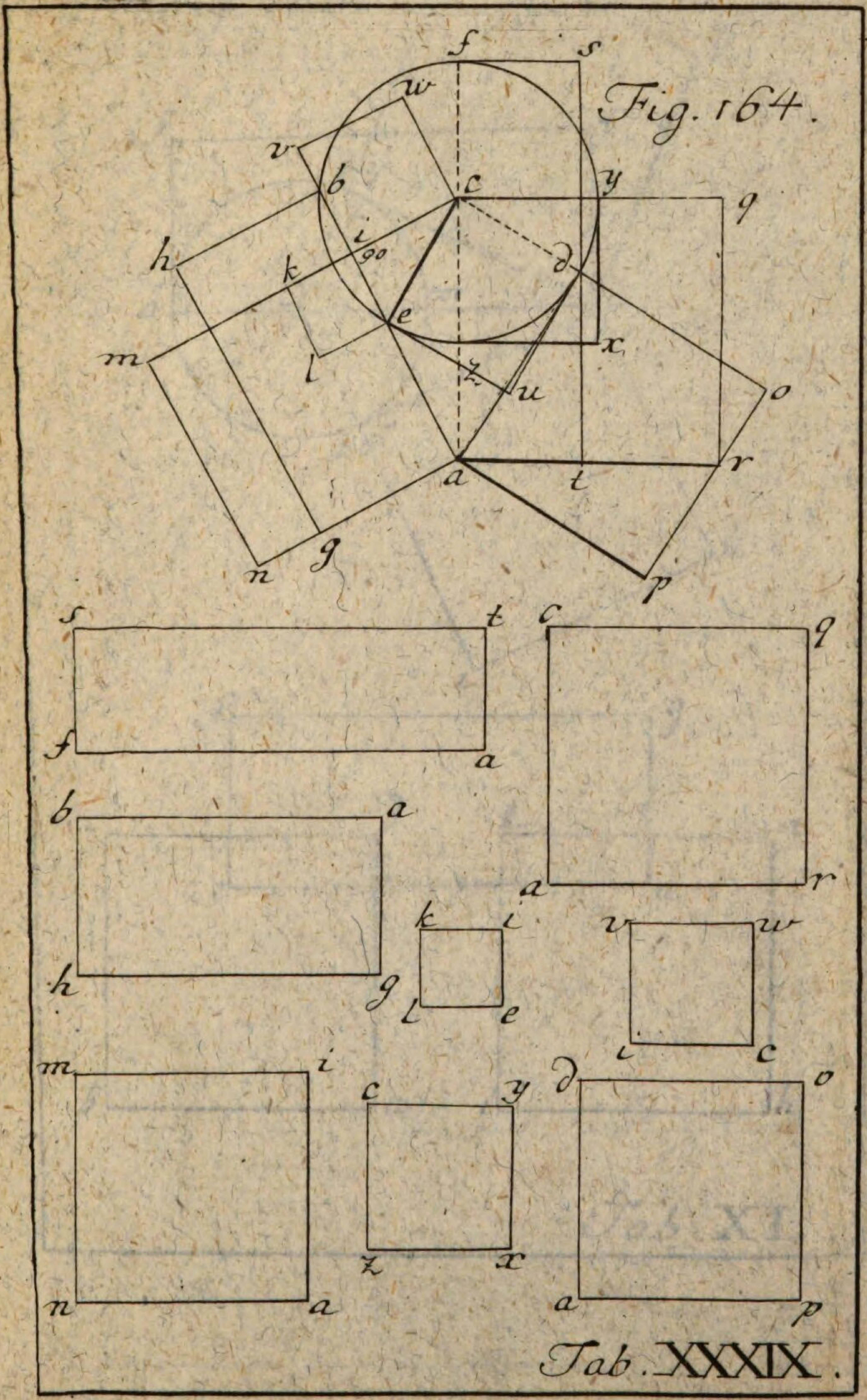
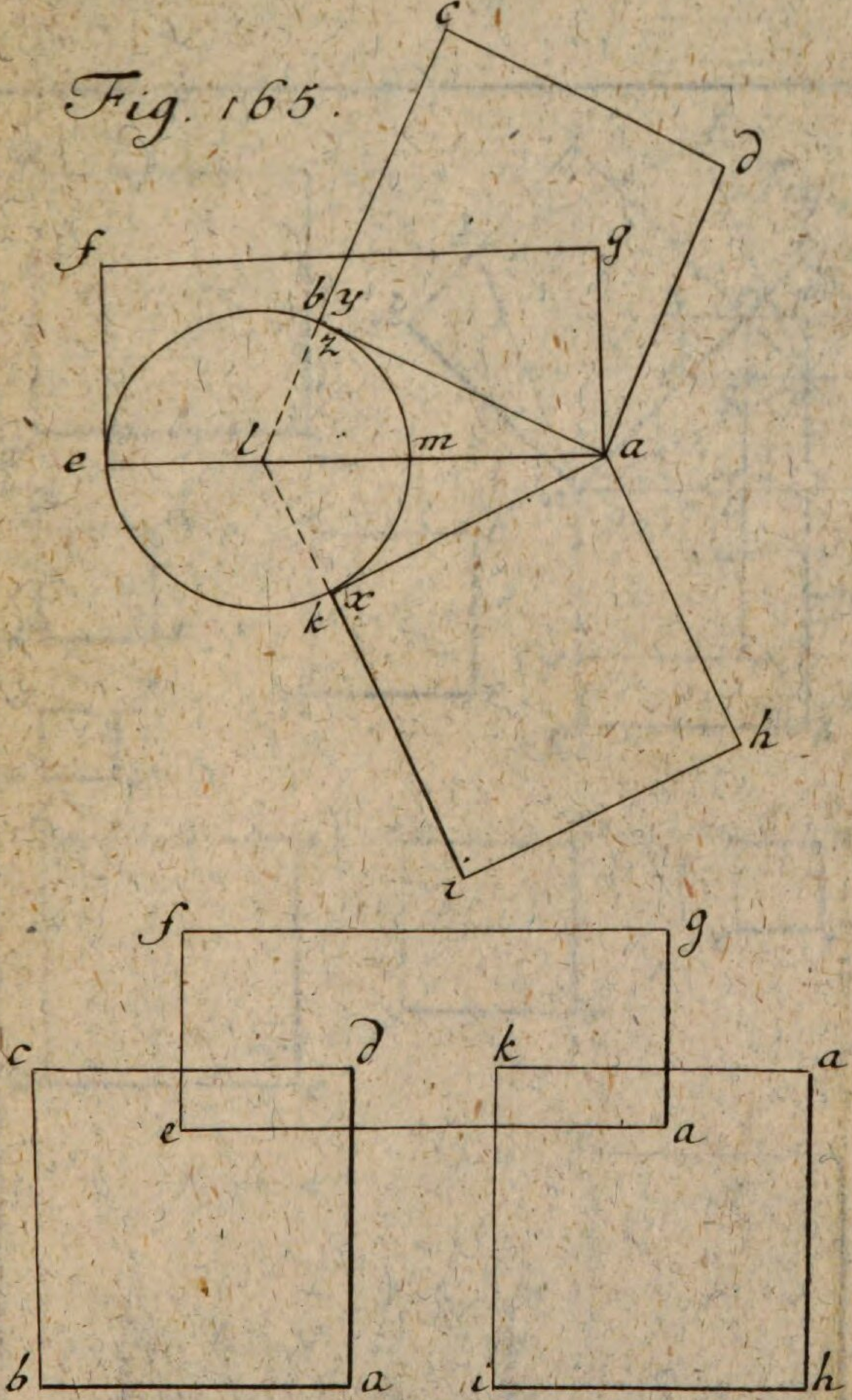


Fig. 164.

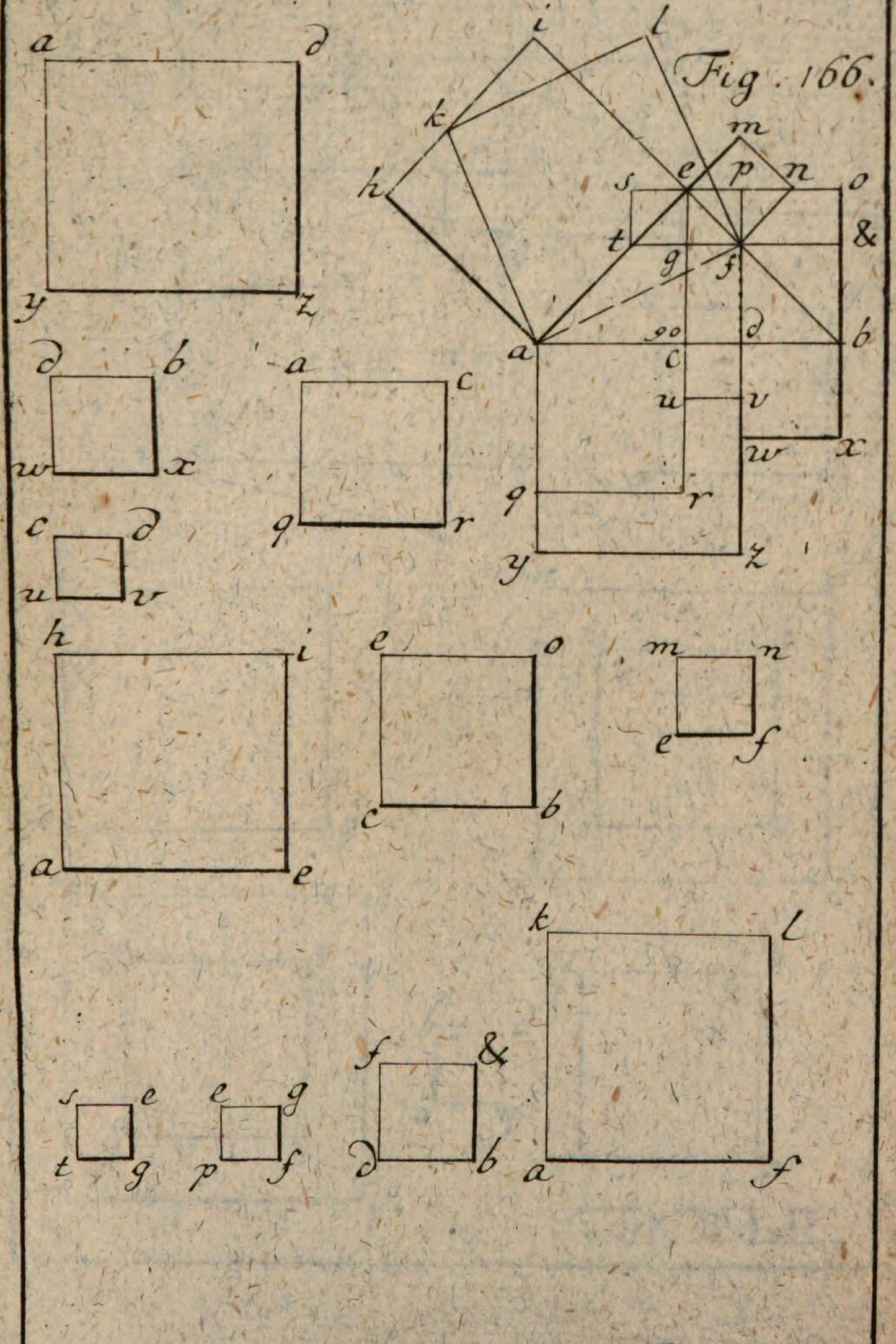
Tab. XXXIX.

Fig. 165.



Tab. XL.

Fig. 166.



Tab. XLI.

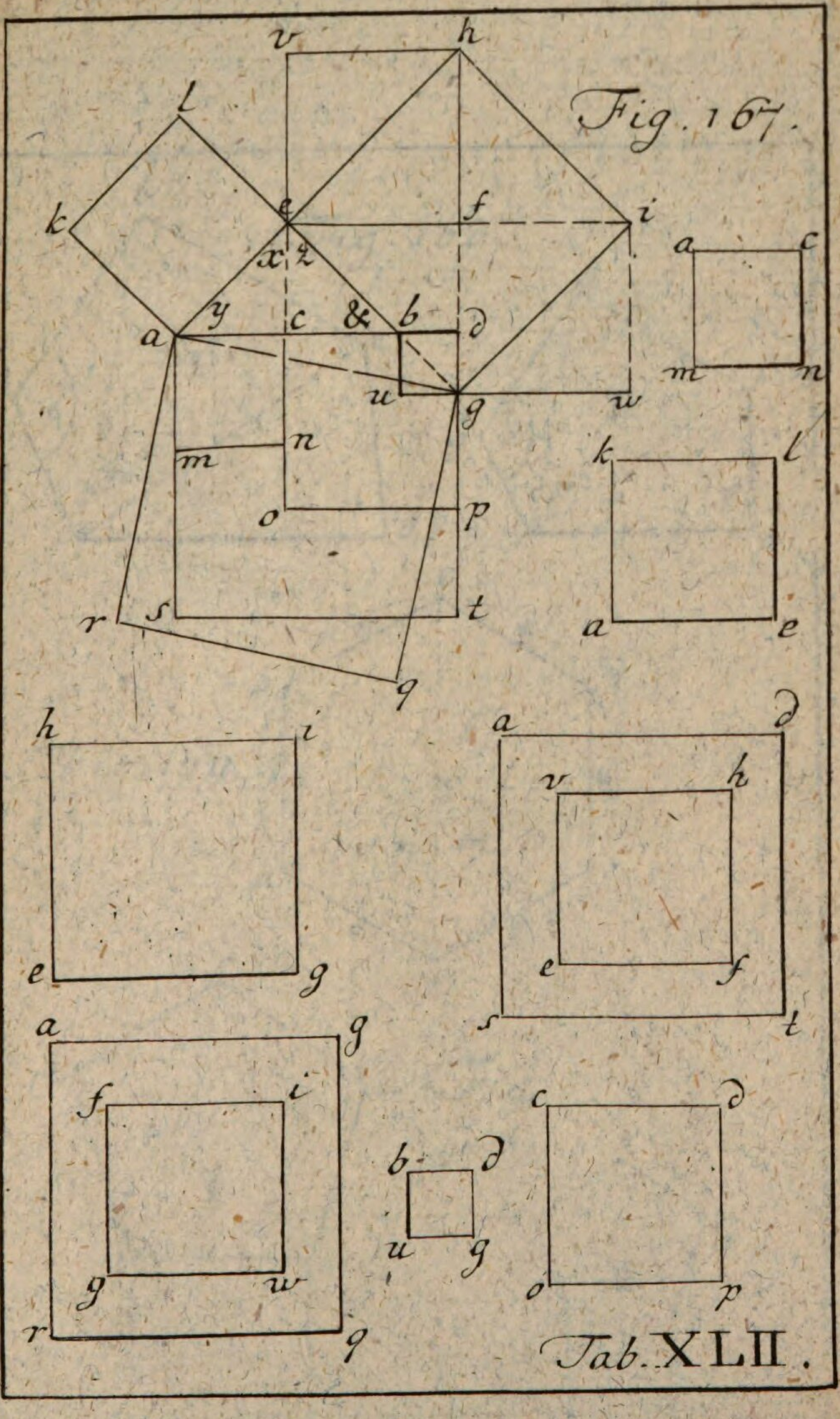


Fig. 167.

Tab. XLII.

Fig. 168.

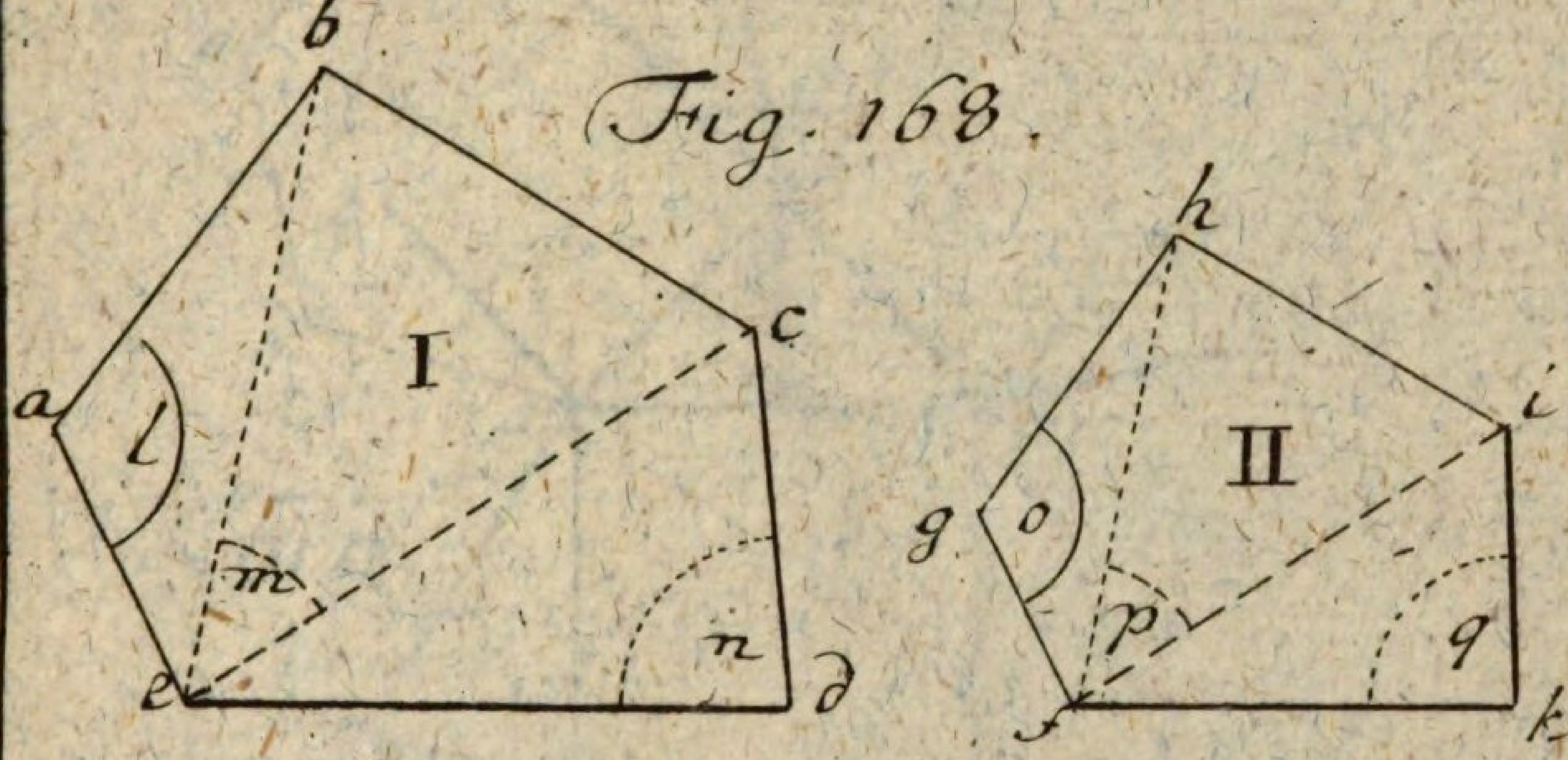


Fig. 169.

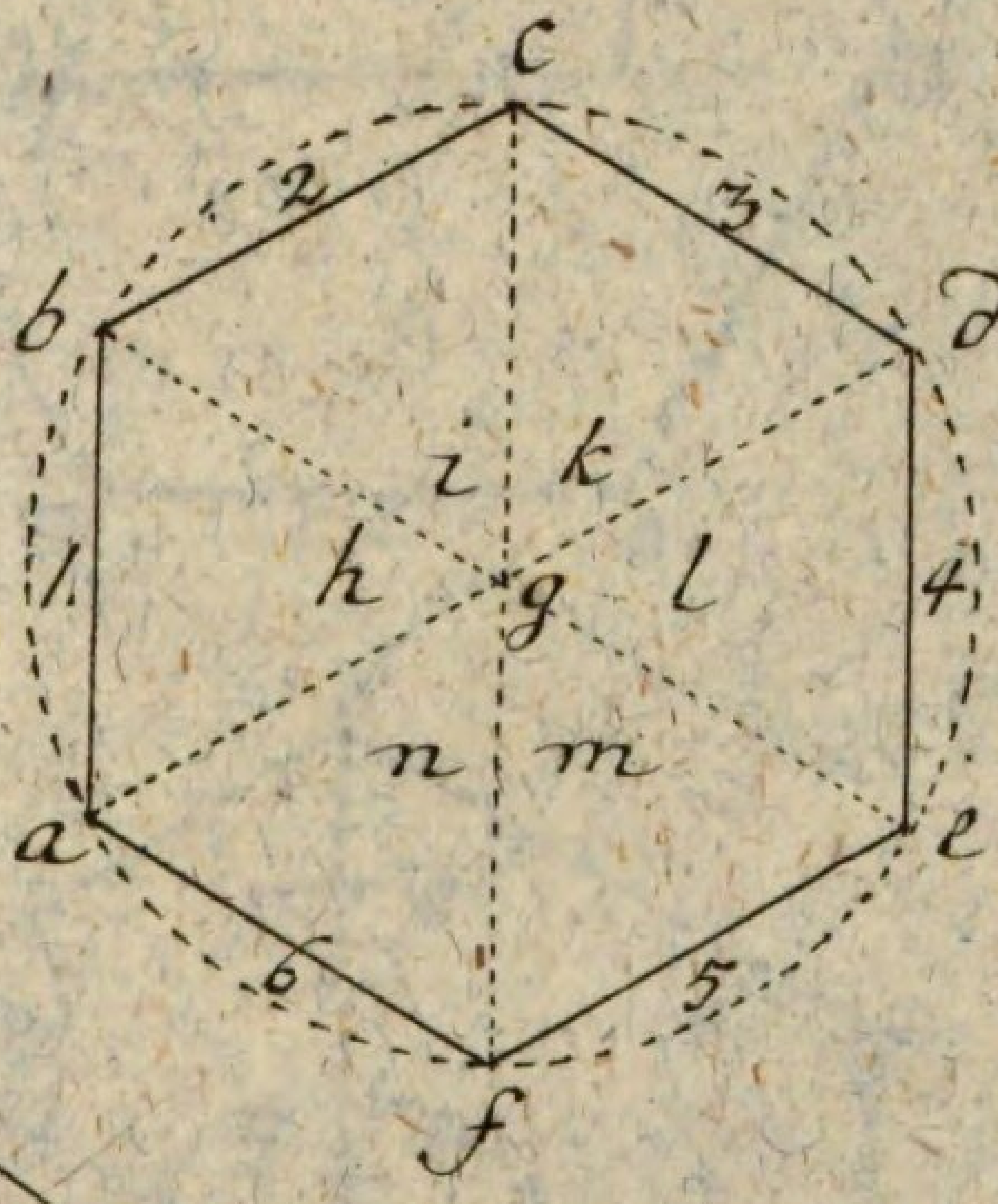
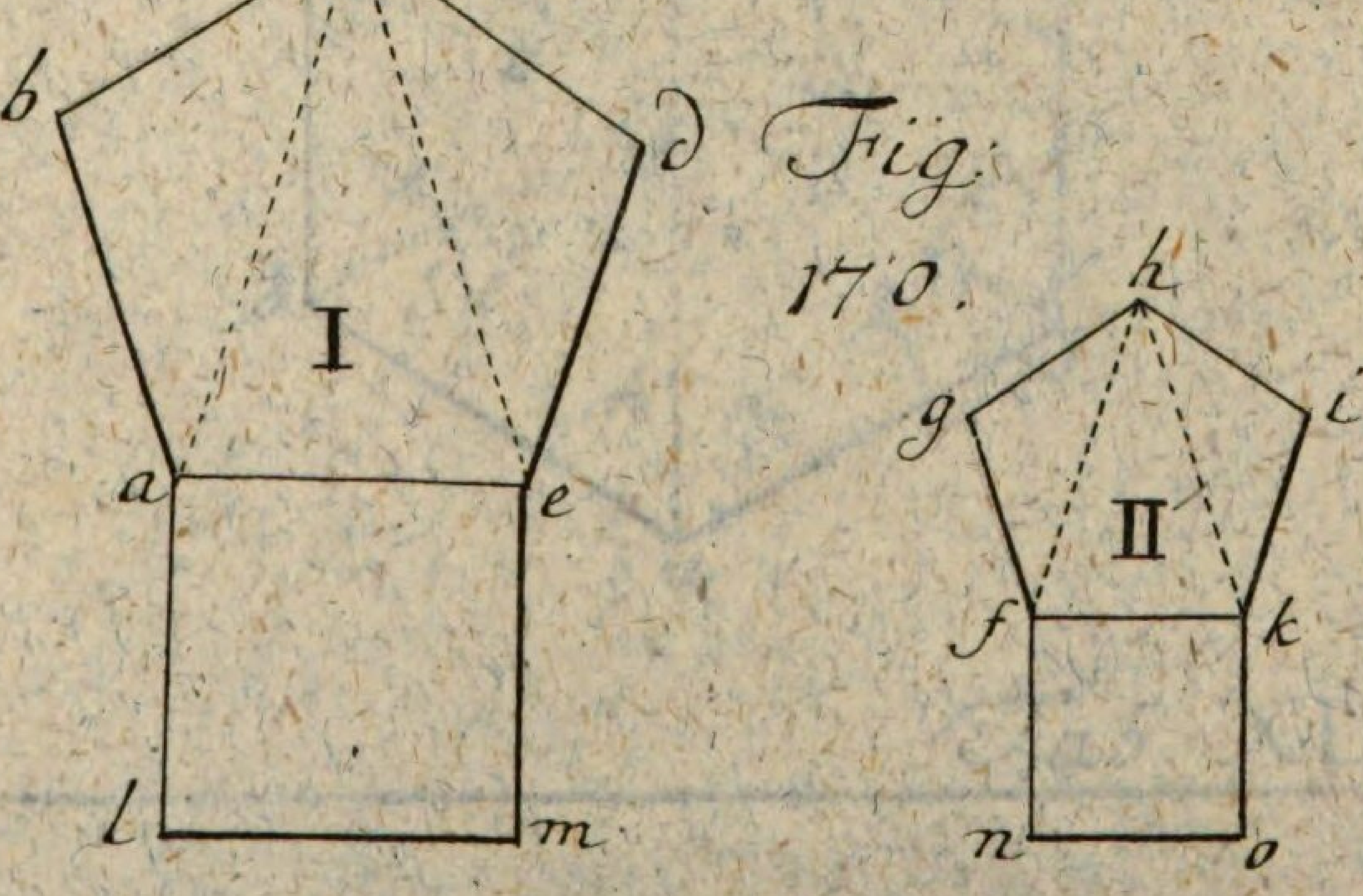


Fig. 170.



Tab. XLIII.

Fig. 171.

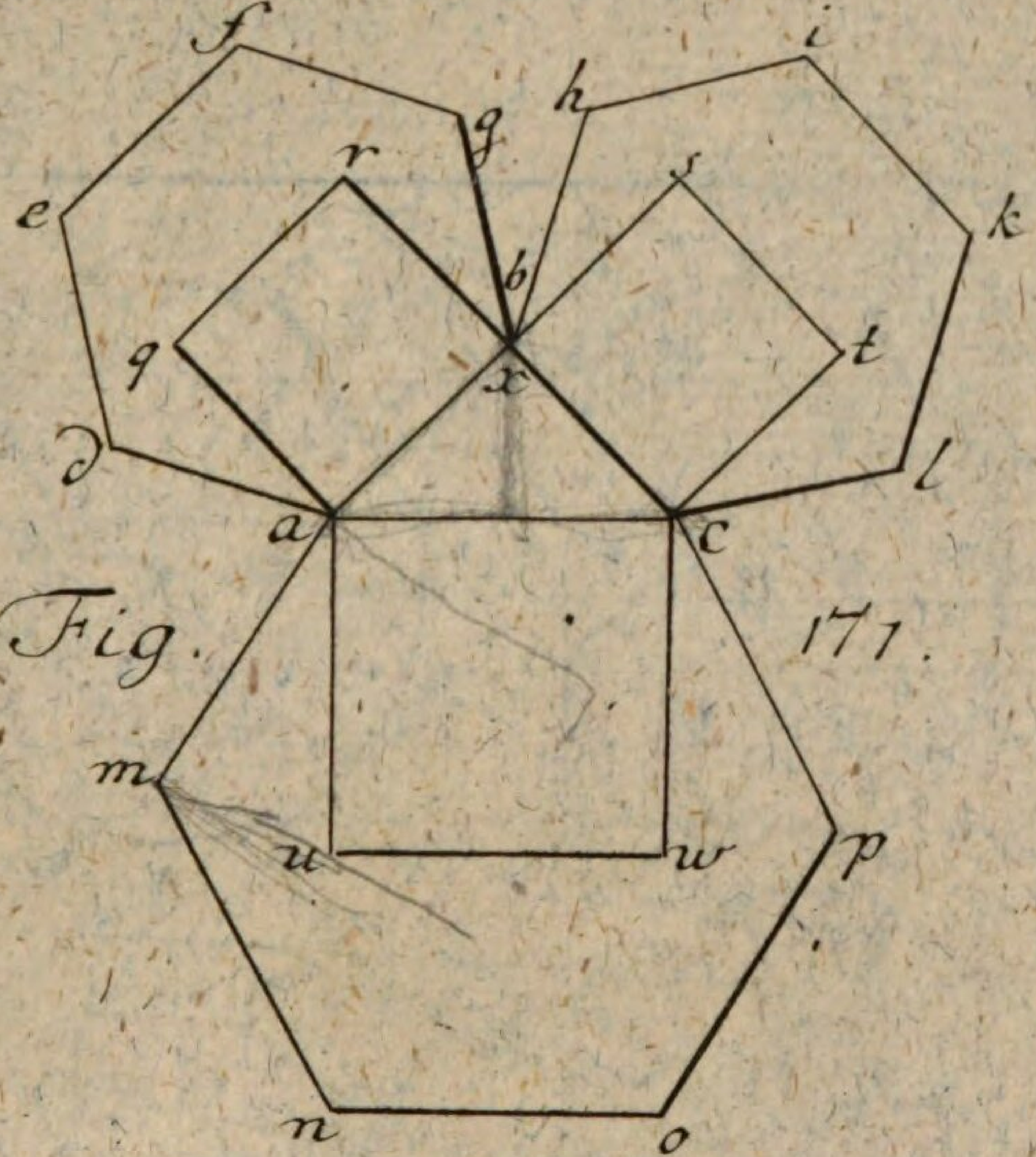
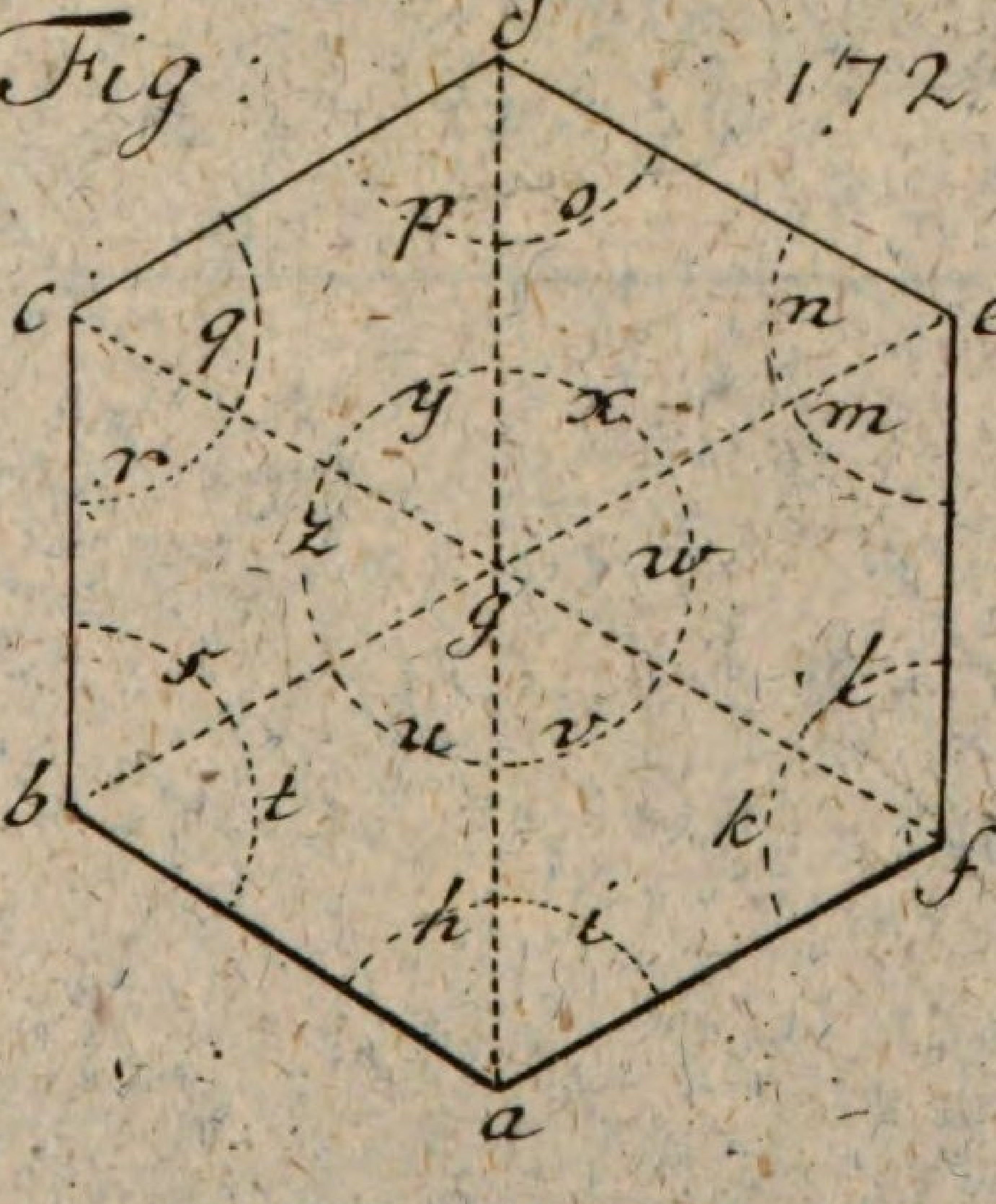


Fig: 172



Tab. XLIV.

Fig. 173.

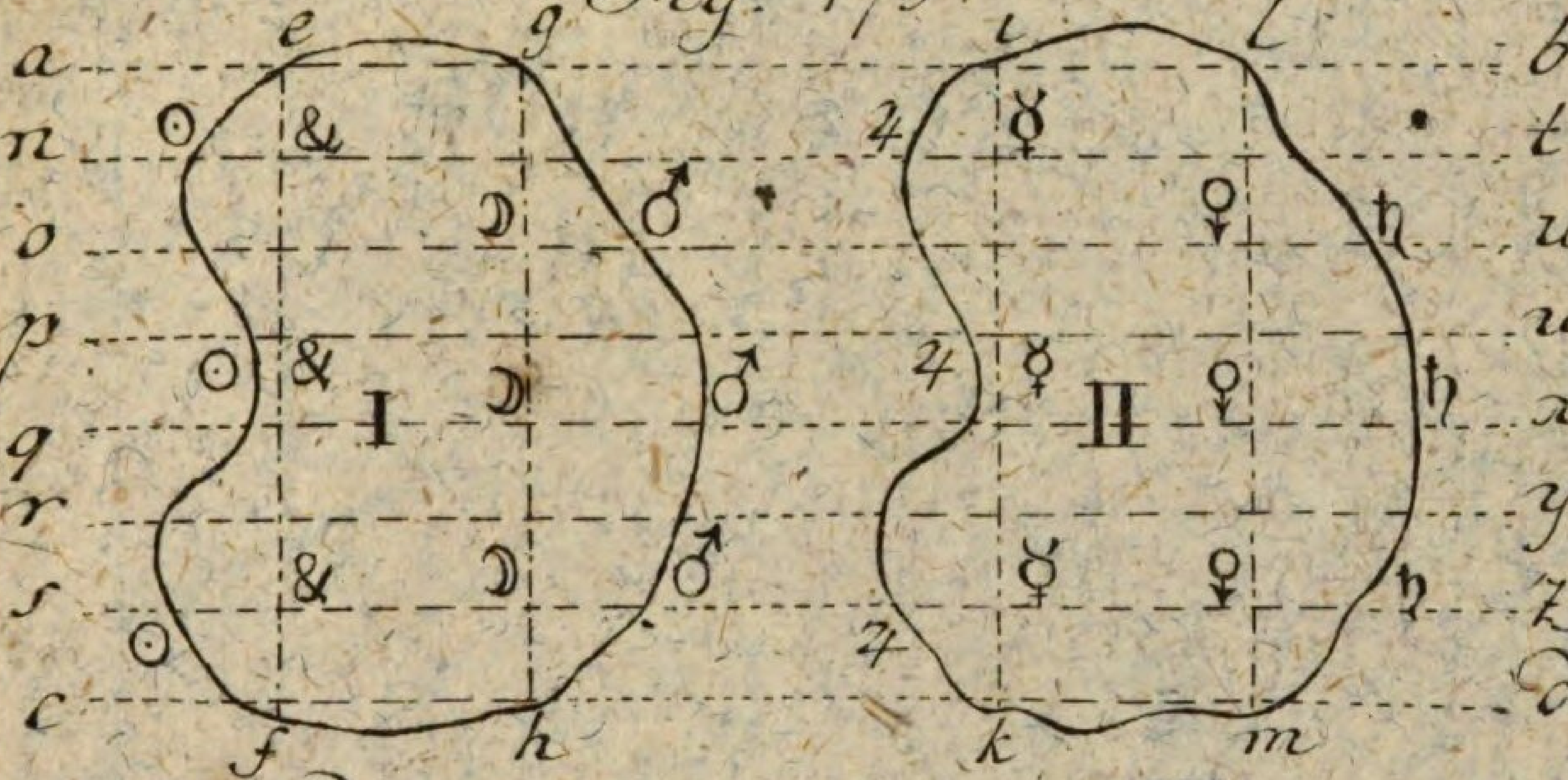


Fig. 174.

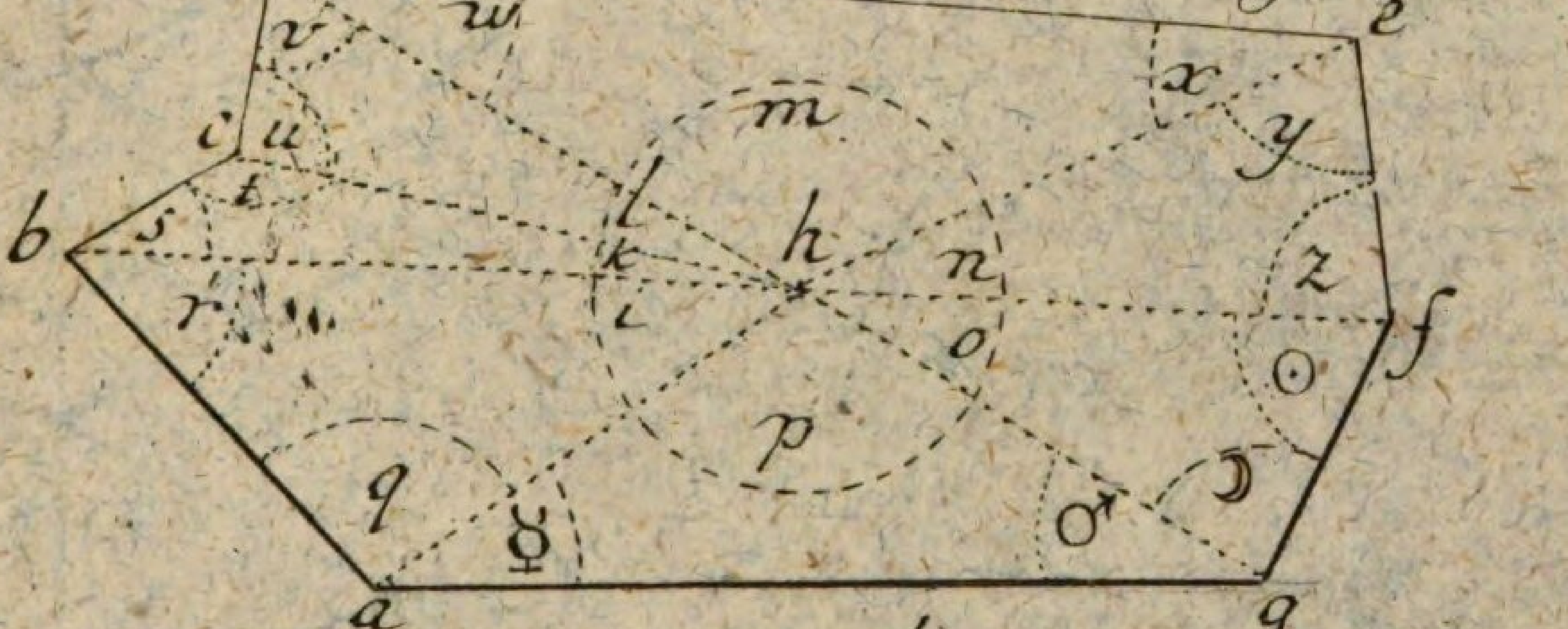
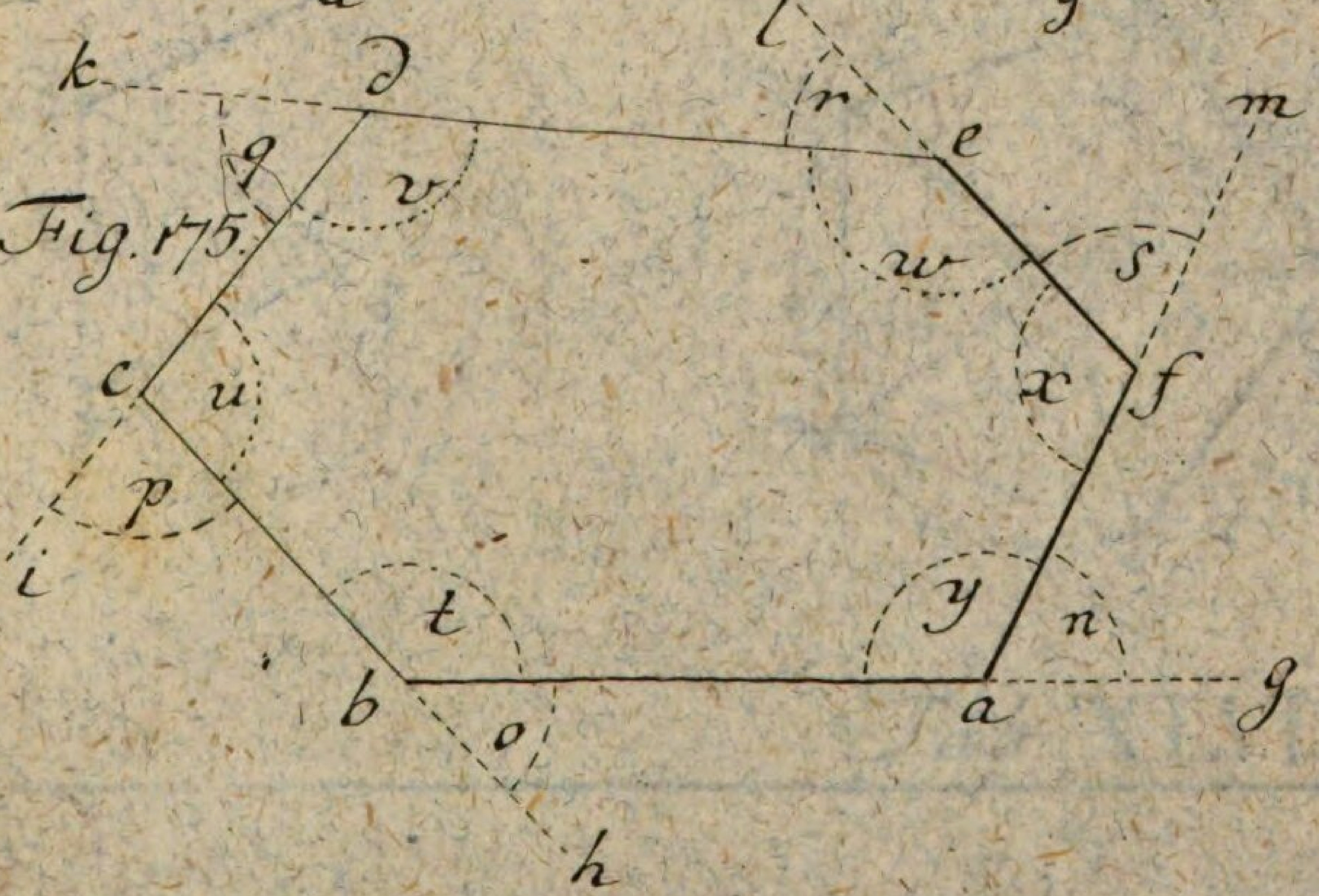


Fig. 175.



Tab. XLV.

Tab. XLVI.

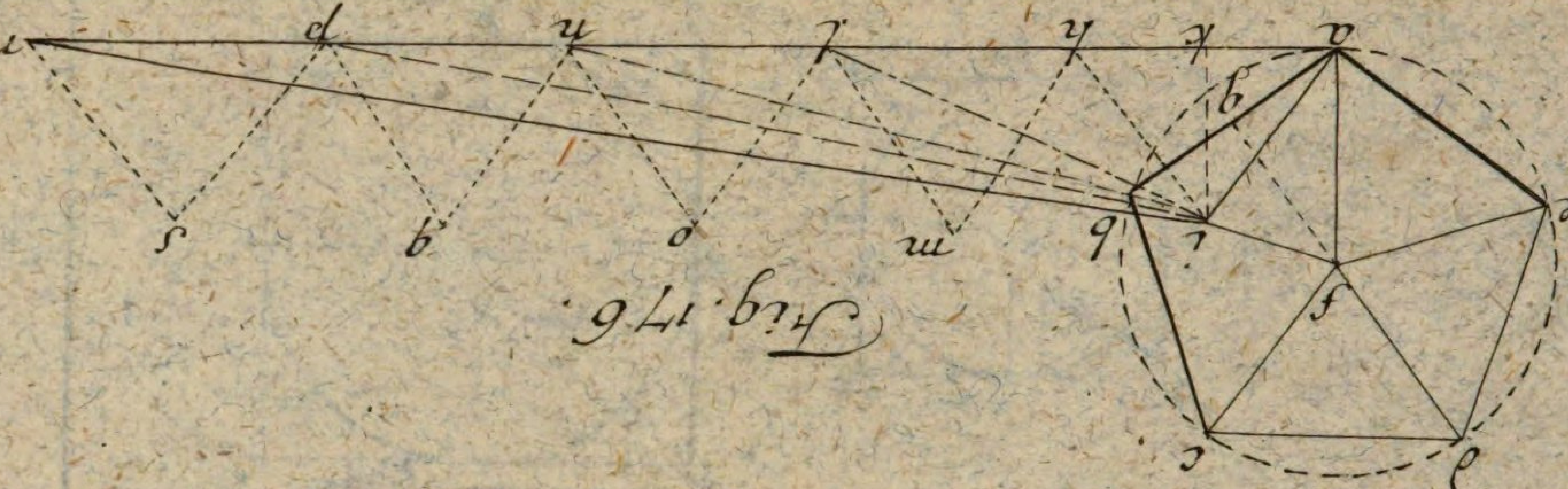
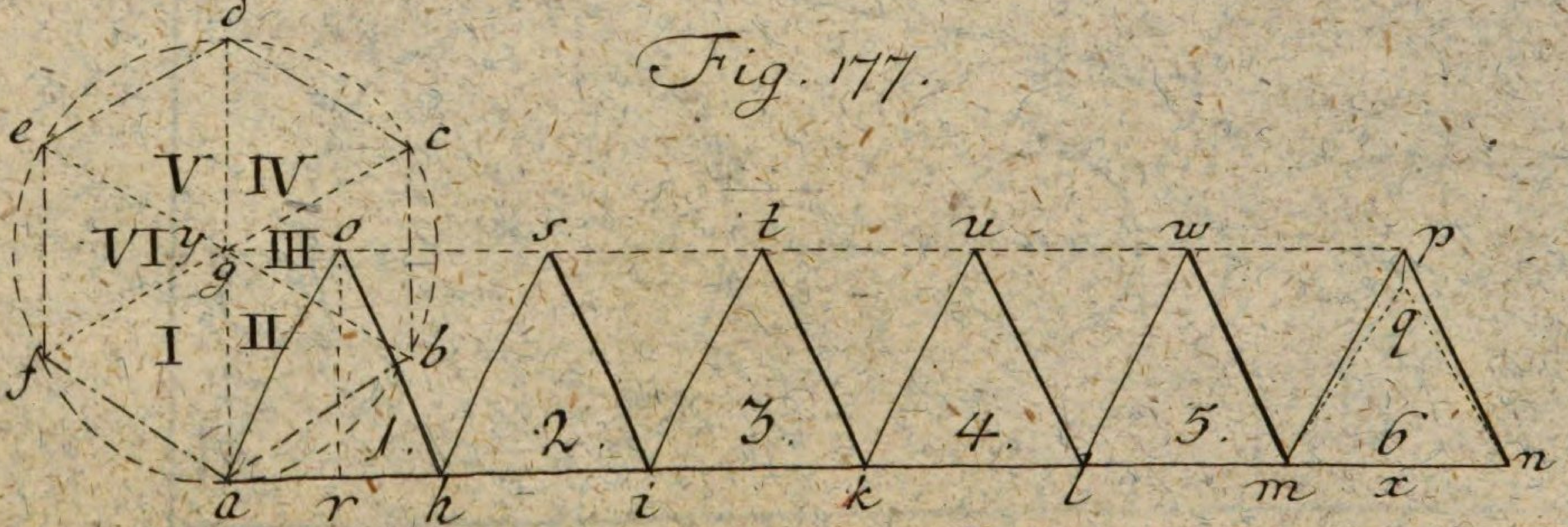
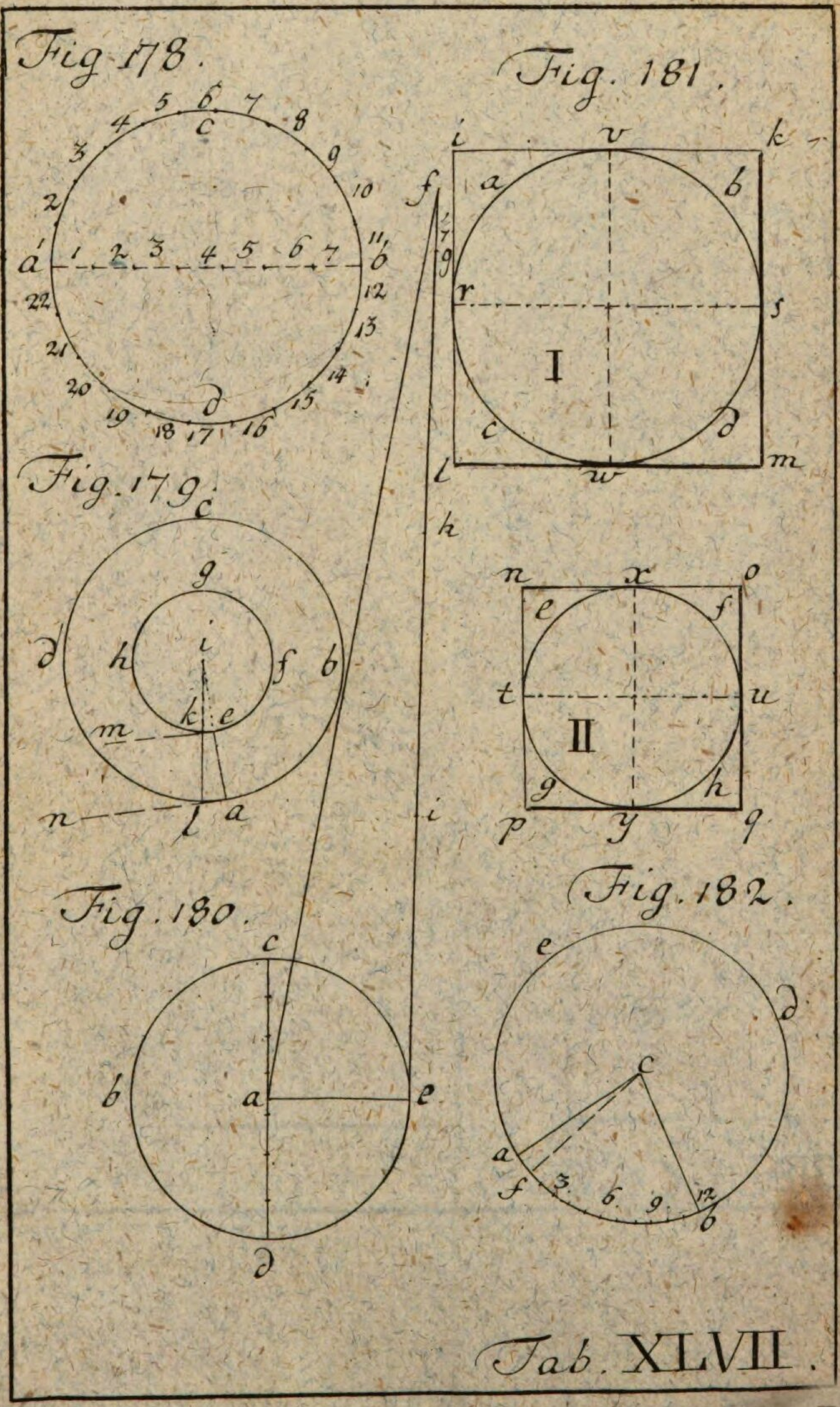


Fig. 176.

Fig. 177.





Tab. XLVII.

Fig. 183.

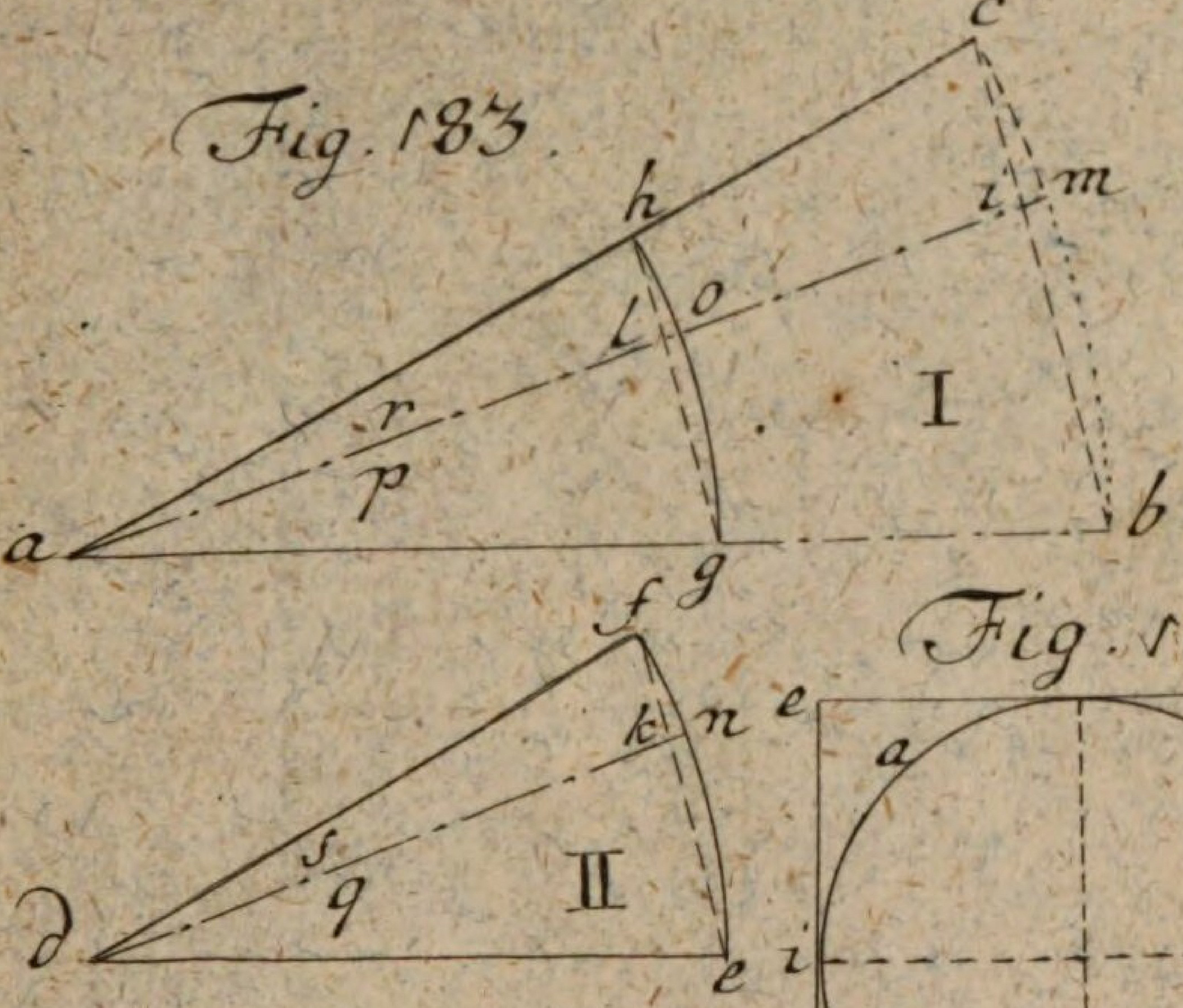


Fig. 184.

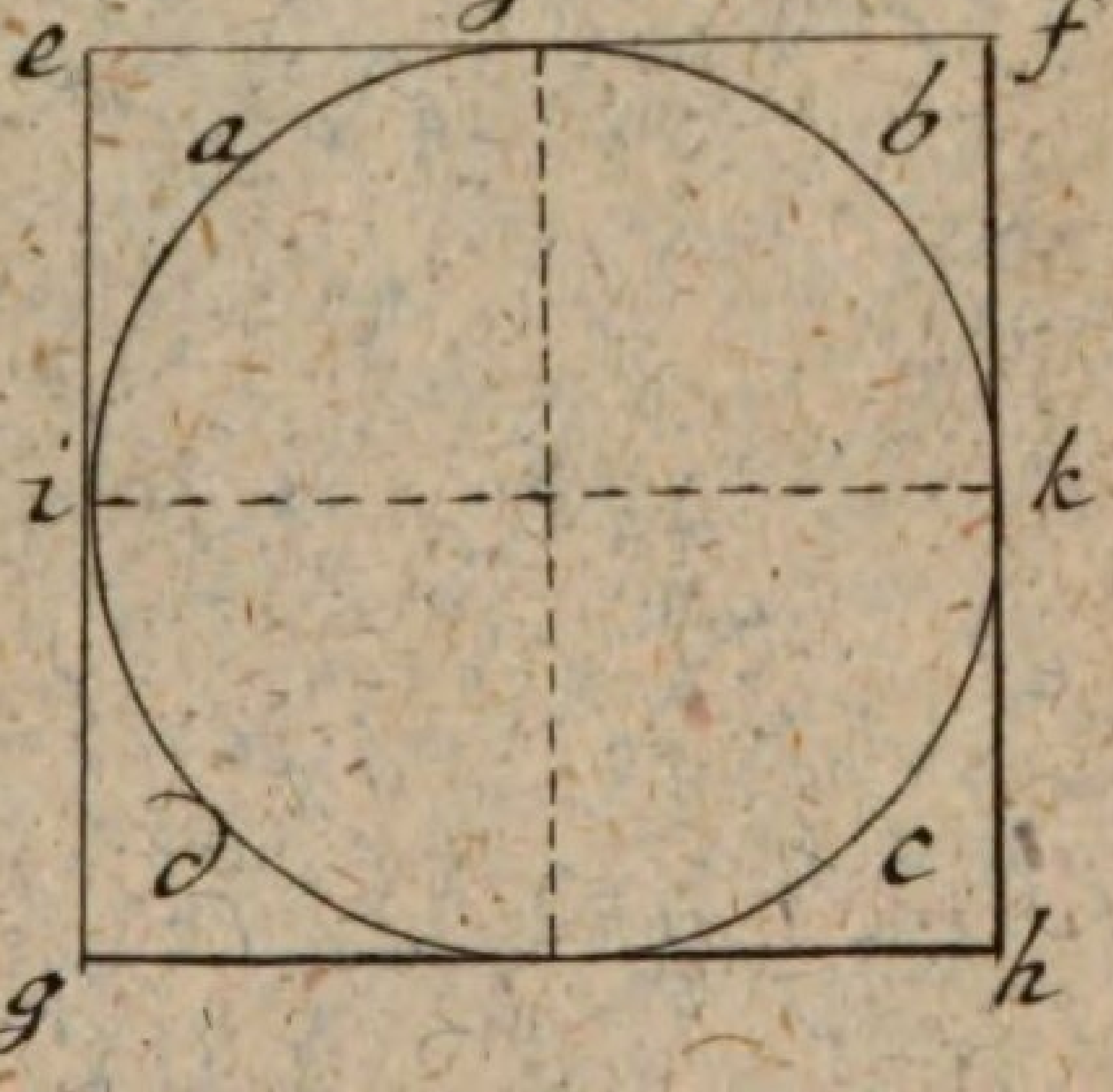
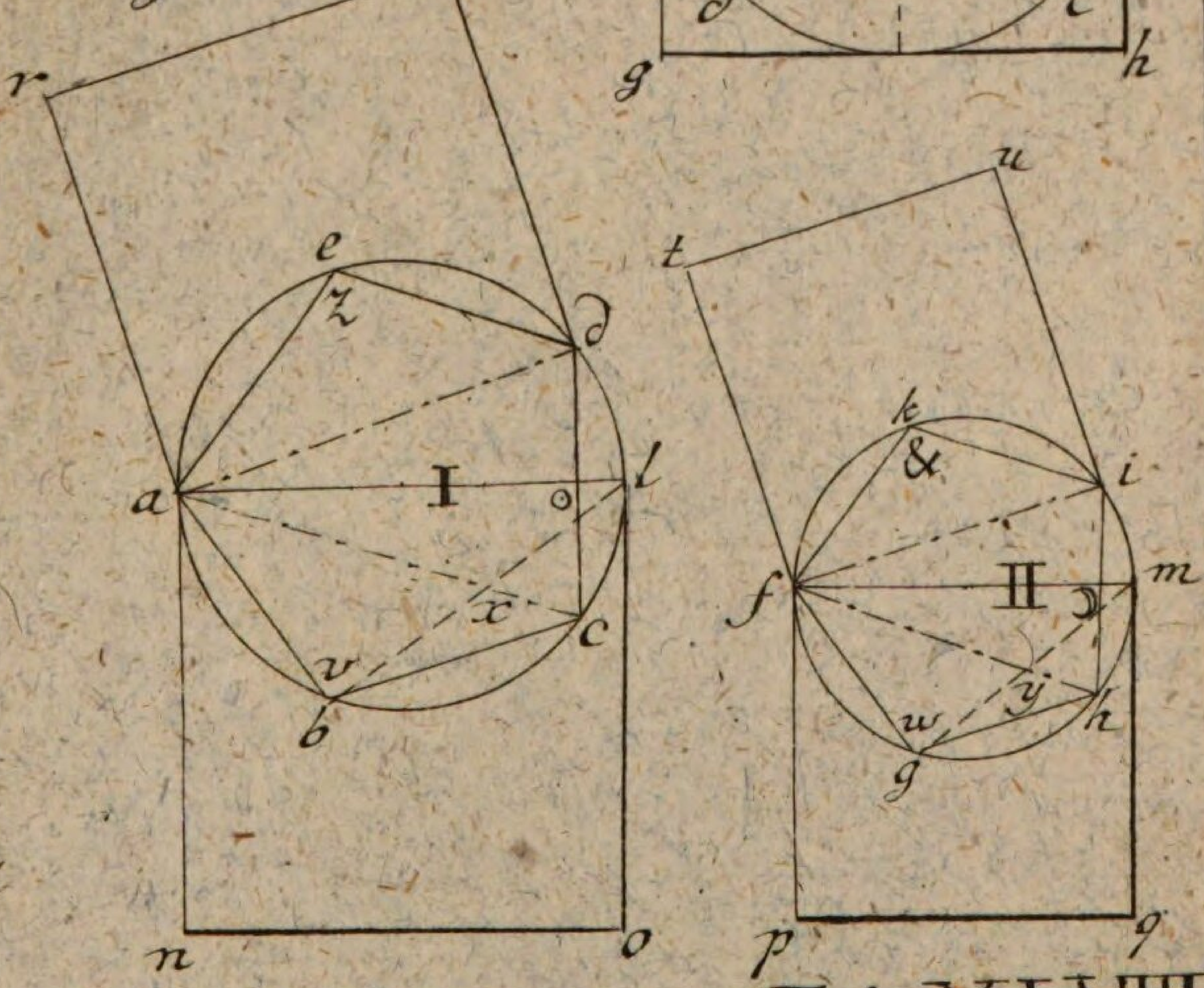


Fig. 185.



Tab. XLVIII.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Moller, Ludwig David von

Neu abgefaßte Methode die Geometrie von sich selbst zu erlernen durch vielen Fleiß und Mühe aus denen besten Autoribus zusammengetragen und mit verschiednen neu erfundnen Aufgaben vermehrt, nebst einer vollständigen nirgend anders wo zu findenden Anweisung vom Gebrauch des so nützlichen als nöthigen Proportionalzirkels versehen und mit sehr vielen hierzu nö
Bd.: 2

Breslau (1781)

Math.p. 348-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137786-3
VD18 90034368